理學博士　高木貞治著

新式算術講義

東京　博文館藏版

明治
37 7 4
内交

緒　言

普通教育の程度を越えて、初等數學を修むる人の參考に適せる書籍の、本邦出版界に殆ど絶無なるは、著者の私に憾とする所なり。然れども初等數學の範圍は廣大にして、其分科は繁多なり。今其全般を通じ、細目に入りて、普く此缺陷を塡充せんこと、短日月を以て成さるべき事業に非ず。此小冊子は主として材料を算術の範圍内より採り、其最重要なる問題を選み、數學最新の發達によりて占め得たる立脚點より之を觀察して、成るべく簡明なる解釋を試む。

普通教育に於ける算術の論ずる所は一見甚卑近なるが如しと雖も、若し深く問題の根柢に穿入せんとするときは、必しも然らず。夫れ教師は其教ふる所の學科につきて含蓄ある知識を要す。算術教師が算術の知識を求むる範圍、其教ふる兒童の教科用書と同一程度の者に限らるゝこと、極めて危殆なりと謂ふべし。確實なる知識の缺乏を補ふに、教授法の經驗を以てせんとするは、「無き袖を振はん」とするなり。是を以て此書は廣く算術の教授に從事する教師諸氏の中に其讀者を求めんと欲す。

又數學を專攻せんとする學生にありても、目下の狀態に於ては、其算術の知識は幼時普通教育によりて得たる所

に限られ、漸く進んで稍、高等なる數學諸分科の修業に入るに當りても、數學の根源に關せる問題を囘顧して、精密に之を復習するの遑なきが如し。斯の如くなれば、其知識は堅牢なる地盤を缺くが故に、學ぶ所愈、進むに隨ひ、知る所愈、不確實となる。是寔に憂ふべし。偶、此缺點を覺りて自ら之を補充せんとする者ありとも、恰當なる參考書の缺如せるが爲に感ずる不便決して少小ならず。抑、算術は汎く數に關する根本的の觀念を論ず、是故に其範圍意外に廣大にして、若し汎く諸分科の專門的書籍を涉獵して其知識を拾集せんと欲せば、少とも整數論、代數學及函數論の一班を窺はざるべからず。此書は斯の如き摸索の勞を

節せしめんが爲に、最重要なる問題を集結して、之に最近接し易き解説を與へんことを期す。

十一章七十五節より成れる此書の內容は、自ら分れて二部となる。其前一半は第一章より第七章に至り、專ら有理數を論ず。これ比較的最よく世に知られたる事實に關せるが故に、敍述の方法は成るべく新奇なるを選み、以て多數の讀者の熟知せる所の者を徒に反復するを避けんとす。蓋し同一の事實を多樣の見地より觀察するは、卽其知識を確實ならしむる所以なり。第四章及第六章に於て、整數論に關する事項の爲に、比較的多大の頁數を割けることと、稍、權衡を失するの觀なきにしもあらずと雖、是一は最

少く普通に知られたる所に最多くの力を致さんとする趣旨に出で、又一は數を觀察するに當り、其大小に關せる側面に偏して、數の個性(アリスメチカル、キヤラクター)を藐視すること、決して數の知識を精確ならしむる所以にあらざるを信ぜるに由れり。

第八章以下は抽象的の量として數を論ず。其目的、數とは何ぞ、量を計るとは何の謂ぞ、との卑近なる問題を解釋するにあり。數の觀念を闡明して、數學に牢然動すべからざる基礎を與へたること、實に十九世紀に於ける數學進歩の異彩にして又其根源なり。斯の如き高等數學の進歩は決して初等數學に影響する所なくして已むべからず。高

等數學の論ずる所は概して通俗の說明に適せずと雖、凡そ極めて根本的なる問題は、之を解決すること非常に困難なると共に、之を理會することは、却て意外に容易なり。無理數の定義も亦此種の問題に屬せり。器械的に算式を把玩するを以て數學の能事畢れりとする者、固より斯の如き問題に關涉あるべからず。然れども一般の健全なる理解力及成熟せる判斷力を以て之に臨むときは、問題の要點を攫取すること決して難からず。

第八章に於て特に量の性質を詳說せるは、量と數との關係を明にして、以て常識と學問とを連結せんと欲せるなり。而して特に重をユークリッドの比例論に置けるは、嘗

に其重要なるが爲のみにあらずして、此クラシックが本邦の普通教育に於て今尙忠實に反復せられつゝあるにも由れり、卽ち一方に於てはユークリッドの理會を確實にすると共に、一方に於て之に貧りて無理數の起源を明瞭ならしめんとせるなり第十章の所說稍高きに過ぎたるが如しと雖、一たびこの最高の立脚點より瞰望するときは、第九章に說きたる無理數に關せる煩雜なる諸定理も又第十一章に論ぜる冪及對數の諸性質も、盡く之を一眸の中に收めて、歷々之を掌に指すが如くなるを得べし斯の如き登臨を阻むことを東道の責を盡せる者と言ひ難からんか。

所載の事項其性質上一々出典を擧げ難し、就中其重要なるを選み附錄として卷末に添ふ、固より遺漏なきを保せず。

此書取材の範圍狹小にして、記する所多くは斷片なり。他日時間の餘裕を得て、初等數學の全般に涉り再び讀者に見ゆるの機あらんことを期す。

明治三十七年六月東京に於て

著　者　識

新式算術講義

目次

目次終

新式算術講義

理學博士　高木貞治著

第一章　自然數の起源

物を數ふること、物に順序を附くること、兩者の關係○順序數の原則四條、數の名、命數法の意義○カルヂナル數、物の數は數ふる順序に關係なし、自然數

（一）

物を數ふることゝ物に順序を賦すること卽ち番號を附くること、心の此二つの作用には密接なる關係あり。一つ二つ三つと數へて物の數の三なることを知る其徑行を分析すれば、先づ甲を認めて第一の物となし、次に乙を認めて甲と異なる第二の物、丙を甲とも又乙とも異なる第三の物となし、さて此第三に至て數へんとする物を盡したれば、卽ち其數の三なるを知るなり、されば物を

數ふるに當て、人必ず此等の物に順序を附けざるを得ず。

吾人の物を數ふるや、一々心の裡に斯の如き複雜なる作用を反復するまでもなく、一見して直ちに其數の三たり、又は五たるを知り得べきこと固より是あり。こは三個五個等少數の物にありては、之を數ふる作用は吾人の屢々反復せる所にして、三個の物、五個の物の與ふる全體の印象は、吾人の記憶に銘せられ、此記憶に扶けられて吾人は殆ど我心に數ふる作用をなすを知覺せずして直ちに其數を知ることを得るなり。此故に少數の物と雖も其物の排列、動靜等が其數を知るの難易に關係すること甚だ多し。正しく列びて靜止せるときは十個以下の物の數を一目して知ること難からざるべけれども、此等の物が運動せるとき、又は不規則に排列せられたる時は、必しも然らず。要するに人、物の數を數へたるときは同時に此等の物に或る順序を附けたりと云ふことを得。」甲乙丙等の物あるとき之を數へんとするに當ては、吾人は甲は一個の物なりと認むること、及甲は乙と異なり丙と異なりと認むる外、甲を他の物と區別す

べき凡ての特徴を抽き去りて顧みず。机、人、數學は三個の物なるは、一個の物、又一個の物、又一個の物が三個の物なりと云ふに異ならず。指を折りて數ふるは數へんとする物の特徴を抽出し去るなり。拇指は机を代表し、示指は人を、中指は數學を代表す。机も人も數學も同じく一個の指にて代表せられたり、人若し指の代表せるは何物なりしかを忘却したりとも、拇指は始めに認められたる一個の物を代表し、示指は次に認められたる一個の物、中指は最後に認められたる一個の物を代表することを知るべく、而して其物の數は卽ち三個なりしことを知ることを得。

一個々々の物を順次一個々々の指にて代表し、最後の物を代表せる指を見て數を知る、物を數ふることの原理は此處に盡きたり。

吾人が數ふべき物の數には限りなし。限りなき物を代表せん爲には又限りなき物を要す。此限りなき物を代表せんが爲に、人の作り出せるを數(順序數)となす。數は人の理性を離れて先天的の實在を有するものに非ず。數の眞相を知

らんと欲せば其起原に遡らざるべからず。

（二）

順序數の觀念は凡て人の共有する所、明白にして動かすべからざるものなりと雖、吾人は數學に於て思想の精確に重を置くが故に、特に次の條目を列擧して之を順序數の原則となさんとす。玆に所謂、數とは順序數を指せるなり。

第一、數には先後の順序あり。二つの相異なる數（甲、乙）の中唯一つ（例へば甲）は他の一つ（乙）に先だつ。

先後といへる語の意義は次に揭ぐる二個の規定に遵ふを要す、（一）甲が乙に先だゝば乙は甲に先だゝず、（二）甲は乙に先だち、乙は丙に先だゝば甲は又丙に先だつ、甲が乙に先だつといふも、又は乙は甲の後にあり又は甲に次ぐといふも同一の事實を表はせり。是故に甲は乙の後にあり、乙は又丙の後にあらば、甲は丙の後にあり。

第二、如何なる順序數にも、必ず直ちに之に次ぐ順序數あり。

乙が直ちに甲に次ぐとは、「甲の後乙の先なる第三の數存在せざるを謂ふ。
第三、甲若し乙に先だゝば、甲より直ちに甲に次ぐ數に移り、此數より又直に之に次ぐ數に移り、次第に斯の如くなし行きて竟に乙に到達することを得。」
第四、順序數には最初の者あり。
　最初とは之に先だつ者なきの謂なり。

此四個條は順序數の原則なり。　順序數の性質は凡て此四個條の原則の論理上必至の結果に外ならず。

第四條に所謂最初の數を1と名づけ、直ちに1に次ぐ數を2、直ちに2に次ぐを3と名づく。斯の如くにして如何なる數に及ぶとも、第二條に定むる所によりて、其數に次ぐ數必ずあるべきにより、あらゆる順序數に一つ一つ命名せんことは語の數に限りあるべき吾人の語彙の能くすべき所にあらず。吾人の語彙の與ふる最大の數は億か、兆か、億、兆は數の終極にあらず、億、兆を超えざるは數の極小の一部分たるに過ぎざるにあらずや。　然れども凡ての數に

命名すべき必要は何處にか在る。億、兆以上の數を用ゆべき實際上の必要に遭遇することなかるべきを外にするも、吾人の有する凡ての觀念が必ずしも一一其名を有すべき必要は何處にかある。或數に名なきは其數なきにあらざるなり。

如何なる數をもある符號にて書き表はすべき工夫は甚だ容易なり。最初の數は・其次は・・其次は・・・斯の如く何處までも同じ符號を反復し行かば吾人の考へ得る數にして斯樣の符號にて表はし得ざるものあることなし。然れども斯の如き記數法の實用に供し難きは言ふまでもなし。

命數法、記數法は理論上の問題に非ずして實用上の問題なり。成るべく少數の語又は符號を、成るべく便利なる方法によりて組み合はせ、而して成るべく多くの數を命名し、書き表はさんとするを主眼とせる此問題に、古今東西の民族の與へたる殆ど一致せる解釋は、卽ち所謂十進法なり。然れども十進法の說明は、數の加減乘除を說きたる上ならでは理論上なし得べからざることに屬す。

(三)

物を數ふるに當ては、此等の物の各を一個の物なりと認むること、及此一個の物は其他の物とは異なる一個の物なりと認むるの外、此物を他の物と區別すべき凡ての特徴を度外に置くべきことは既に言へり。さて今數へんとする物の中、最初に一個の物と認めたるものに配するに1なる順序數を以てし、次に此物とは異なる一個の物なりと吾人の認めたるものに配するに2を以てし、順次斯の如く一つ一つの物と一つ一つの順序數とを取り合はせ(對照し、配合し)行くに、順序數の引き續きは究まる所なきが故に、如何なる場合に於ても斯の如き對照の爲し得ざることあるべからず。斯くて今數へんとする物の盡くるに至て止むときは、最後の物に取り合はされたるは或る一つの順序數にして、此順序數は即ち今數へたる物の數を定むべきものなり。

若干の物の與へられたるとき、右に述べたる手續きによりて之を數ふるときは、此等の物の間に定まりたる順序を生じ、此手續きの終局に於て或る定まり

たる順序數に到達す。

然れども個々の物と個々の數とを對照するに當りて、此等の物の中何れが1に配せられ、又何れが2に配せらるべきやは、卽ち物を數ふる順序は、全く數ふる人の隨意なるべきにより、此手續きは一定不動のものに非ず。數ふべき物は定まれりと雖、數ふるといふ手續きの爲に此等の物の中に生じ來る順序は樣々に變り得べし。唯此手續きに於て一定不動なるは最後に到達すべき順序數なり。例へば*A*、*B*、*C*なる物を數へんとするとき*A*、*B*、*C*に順次1、2、3の配せらるゝこともあるべし、又*B*、*C*、*A*に順次1、2、3の配せらるゝこともあるべし。

1	2	3
A	*B*	*C*

1	2	3
B	*C*	*A*

然れども*A*といひ*B*、*C*といひ數ふる人の眼には各唯一個の物として映ずるに止まるが故に上の配合は畢竟

1	2	3
一個の物	一個の物	一個の物

1	2	3
一個の物	一個の物	一個の物

の如く書き表はすことを得べく、斯く書き改められたる上は、此二樣の數へ方を區別する所以の者は全く消失せるを認むべし。物を數へて最後に到達すべき順序數は數ふる順序に關係なく一定不動のものなるが故に、此順序數を以て此物の數を表示することを得。物の數を表はすの意義に於て數をカルヂナル數といふ。

カルヂナル數は全く順序數と同一の條件によりて定めらるべきものなり。若し言語の明白を欲せば、先に掲げたる條件の中先後の語に代ふるに大小の語を以てすべし。

物の數の多少は之を表示すべき順序數の先後によりて知るべく、カルヂナル數の大小は之に相當せる順序數の先後によりて定むべし。

個々の順序數を個々の物と見做すときは、順序數の數を數ふることを得。1よりnに至るすべての順序數の數は卽ちnなり。

同じく是數なり、順序を表はすときは之を順序數といひ、物の多少を表はす

ときは之をカルヂナル數といふ。此の區別を度外に置きて1、2、3……を自然數(又は整數)といふ。クロネッカー曰く、整數をば造物主作り給ひぬ、其他は人の業なりと。自然數の語寔に恰當なりといふべし。

第二章　四則算法

加法、加法の應用上の意義、交換の法則、組み合はせの法則、減法の可能、減法の應用○乘法の意義、加法に對する分配の法則、組み合はせの法則、交換の法則、倍數、除法可能の條件○零の定義及其性質○多くの數の加法及乘法、ヂリクレーの證明○減法及除法に關する定理○冪及其算法○除法の擴張、數の展開、十進法○十進法に於ける四則の演算

(一)

茲にA、B、C……等の文字にて表はされたる物一組あり、之を甲と名づく。又P、Q、R……等の文字にて表はされたる物一組あり、之を乙と名づく。(A、B、C……P、Q、R……等は數を表はせるに非ず、此等の文字は一つ一つの物を表はせ

るなり、甲、乙は一つ一つの物を表はさず、物を一括して得たる全體の名なり)此甲なる一組の物に乙なる一組の物を合同して之を第三の一組となし、之を丙と名づく。丙は A、B、C、P、Q、R……等郎ち始め甲又は乙に屬せる物を盡く含み、且此等の物の外の物を一も含まず、是故に甲に乙を合同するも又乙に甲を合同するも其結果は同一なり。

又甲、乙、丙なる三組の物あるとき、先前に言へる如くにして甲と乙とを合同し、斯くして得たる一組に更に丙を合同して一組となすときは、此最後の一組は始め甲又は乙又は丙に屬せる物をば盡く含み且此外の物は一も含まず、是故に三組の物を合同する結果は其順序に關係せず。

甲なる一組の物 A、B、C……其數 a、乙の物 P、Q、R……其數 b なり、甲乙を合同して作りたる丙なる一組の物の數如何。丙の物の數を數ふるに當りて之を數ふる順序は數へて得べき結果に影響を及ぼすことなし。よりて前に甲に屬せし物に 1、2、3……a の順序數を配合する手數を反復するまでもな

く、前に乙に屬せる物の中1に配せられたる者(P)には a の次の順序數($a+1$)を以てし、前に乙に屬して2に配せられたる物には又其次の順序數($a+2$)を配し、斯の如くにして竟に前に乙に屬して b に配せられたる物に配すべき順序數を c と名づくれば、c は卽ち甲と乙とを合同して作れる丙なる一組の物の數なり。次の圖は此手續きを說明す。

1	2	3	……	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	……	c
A	B	C			P	Q	R		
1	2	3	……	a	1	2	3	……	b

是故に a、b なる二つの數より c に達すべき手續きは次の如し、

a の直ぐ次なる順序數には1を取り合はせ、其次の順序數には2を取り合せ、次第に斯の如くにして竟に b に取り合はさるゝ順序數は卽ち c なり。」

斯の如くにして a、b より作り得べき數 c を a に b を加へて得たる和といひ之を表はすに次の記法を用ゆ。

$$a+b=c$$

例へば甲の物の數六乙の物の數三なるとき甲、乙を合同して之を數ふるに拇指を屈して七と呼び示指を屈して八、中指を屈して九といふは卽ち七、八、九に一、二、三なる順序數を配し行けるに外ならず、拇指、示指、中指は 1、2、3 を代表せるなり。

若し前に乙に屬せる物に 1 より b までの順序數を配せる手續きを基礎となし、b の次の數に 1 を配し、又其次の數に 2 を配し次第に斯くの如くなし行きて竟に a の配せらるゝ數に到着するときは此數は卽ち $b+a$ なり、さて $a+b$ も $b+a$ も共に丙なる一組の物の數に外ならざるが故に

$$a+b=b+a$$

卽ち二つの數の和は加へられたる數の順序に關係せず。之を加法の交換の法則といふ。三組の物を順次合同する場合に同樣の論法を適用して

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

を得、a、b、c なる三個の數を加ふるに當り先づ a に b を加へ、更に其和に c

を加ふるも、或は又aにb、cの和を加ふるも、結果は同一なりとなり、之を加法の組み合はせの法則といふ。

二組の物を合同して得たる一組の物の數を數ふる手續きにつきて前に說きたる所により、直ちに次の事實を知り得べし、

aに或る數bを加へて得たる和はaよりも大なり、$a+b>a$

此定理は又之を轉倒することを得、

c若しaより大ならばcは必ずaと或る數bとの和に等し、卽ち

$$c=a+b$$

なる如き數bは必ず存在す、

今1、2、3……cなる順序數を一組の物と考ふれば、aはcより小なるが故にaは必ず此一組の中にあり。今此一組を分ちて、1、2、3……aのみを甲の一組とし、其他のものを乙の一組となす。斯くの如くして作り得たる甲、乙の二組を合同するときは前の一組に復歸すべきこと勿論なり。さて甲なる一

組の中にある順序數の數は a なり、乙なる一組の中なる殘りの順序數の數を數へて此數を b と名づくれば $a+b=c$ にして此 b は卽ち吾輩が其存在を主張せる所の數に外ならず。

c、a なる二つの數の中 c は a より大なるときは

$$a+x=c$$

なる條件に適すべき數 x の必ず存在すべきことは既に明了なり。今斯の如き數は唯一個に限り存在し得べきことを證明せんとす。今 b の外に尚上の條件に適合すべき數 b' 存在するものとせば、卽ち

$$a+b=c \qquad a+b'=c$$

なりとせば b、b' の中一方は他の一方より大ならざるを得ず。例へば b' は b より大なりとせば

$$b'=b+d$$

なる如き數 d は必ず存在せざるを得ず、隨て

此等式の右邊に立てる和は組み合はせの法則によりて

$$a + b' = a + (b + 1)$$

$$(a + b) + 1 \quad 即ち \quad c + 1$$

に等し、而して此和は c よりも大ならざるを得ず。即ち b' 若し b より大ならば $a + b'$ は $a + b$ よりも大なり。是故に b は b' に等しからざるを得ず。

c が a より大なるとき斯の如くにして b なる數に到達すべき手順を c より a を減ずといひ b を c と a との差といひ、之を表はすに次の記法を用ゐる

$$b = c - a$$

c、a より b に到達するには次の手續によることを得、1、2、3……c なる順序數を考へ、其最後の者 c には 1 を配し、c の前の數には 2 を配し、次第に斯の如くなし行きて竟に a に配せられたる數に達する時、此數の直ぐ前なる數は即ち b なり。例へば 8 より 5 を減ぜんとせば次の圖に示すが如くすべし。

1	2	3	4	5	6	7	8
			5	4	3	2	1

$$8 - 5 = 3$$

丙なる一組の物あり其數 c なるとき、之を分ちて甲、乙の二組となすときは、甲に屬する物の數は c より小なり、此數を a と名づくれば、乙に屬する物の數は卽ち $b = c - a$ なり。

(二)

加法は組み合はせの法則に從ふものなるが故に、同一の數 a を幾回も加へ合はせて得らるべき和は此數と加へ合すべき回數 b とによりて全く定まるべし。斯の如き和を求むるは a 及び b なる二つの數を與へて之より或る定まれる第三の數を得べき手續きなるが故に、之を a、b なる二數に施こせる一の算法と見做すことを得。此算法は卽ち乘法にして a は被乘數、b は乘數、求め得たる和は a の b 倍或は a、b を乘したる積 ($a \times b$ 又は ab) なり。a、b は何れも此積の因數にして ab といふ積の第一の因數は被乘數、第二のは乘數なり。加へ合はすといふ語は少なくとも二個の數を豫想するが故に、a に 1 を乘ずとは沒意義の事なり。吾輩は玆に改めて、$a \times 1$ とは a の事なるべしと定む。

之をしも前に述べたる乘法の定義の中に包括せられたりとせんは牽强なり。
乘數が1なる場合と然らざる場合とに於ける乘法の意義は次の式により明に書き表はさる、

$$a \times 1 = a \qquad (1)$$

$$a \times b = a + a + a + \cdots\cdots + a \qquad (2)$$
$$(1)\ (2)\ (3) \cdots\cdots\cdots (b)$$

次に揭ぐるは乘法に關する最も重要なる定理なり。

一、加法に對する分配の法則。

$$a(b+c) = ab + ac \qquad (3)$$

$$(b+c)a = ba + ca \qquad (3')$$

證、aに$(b+c)$を乘ずるはaといふ數$b+c$個の和を作ることにして、aといふ數$b+c$個は卽ちaといふ數b個と又aといふ數c個とを合同せるものなるが故に、此二組のaを別々に加へ合はせてab, acを得たる後、更に此二つを加へ合はせ、求むる所の積の$ab+ac$に等しきを知る。又$b+c$にa

を乘ずるは $b+c$ を a 個加へ合はせたる和を求むることにして、加法の順序を變更し、先づ b のみ a 個を加へ合はせて和 ab を得、又 c のみ a 個を加へ合はせて和 ac を得、此等の二つの和を加へ合はせて求むる所の積の $ab+ac$ に等しきを知る。

和を構成する數二個より多くとも分配の法則は尙成立すべし、卽ち b_1、b_2、b_3…b_n なる n 個の數あるときは

$$a(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)=ab_1+ab_2+\cdots\cdots+ab_n \qquad (4)$$

$$(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)a=b_1a+b_2a+\cdots\cdots+b_na \qquad (4')$$

なり。

若し b_1、b_2、b_3………が盡く同一の數 b なりとせば(4)より

$$a(b+b+\cdots\cdots+b)=ab+ab+\cdots\cdots\cdots+ab$$

$$(1)\ (2)\cdots\ \cdots\ \cdots(n) \qquad (1)\ (2)\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots(n)$$

を得、卽ち

$$a(bn)=(ab)n \qquad (5)$$

a、b、n なる三個の數に順次乘法を施こすとき因數の順序は積に影響することなきこと加法の場合に於けると同趣なり、之を**組み合はせの法則**といふ。此法則は n が1なる場合にも成立すべきこと明なり。

交換の法則も亦乘法に適用すべし、a、b なる二數の積は因數の順序に關係せず、即ち

$$ab = ba \qquad (6)$$

先づ b が1なる場合には此法則は明に成立せり、$a.1$ とは(1)によりて a のことにして $1.a$ は1を a 回加へ合はせて得べき數にして此數は a なり、故に

$$a.1 = 1.a$$

さて一般に(6)を證明せんが爲に(4′)に於ける b_1、b_2………b_n を盡く1に等しとせば

$$\underset{(1)\ (2)\ \ldots\ \ldots\ \ldots(n)}{(1 + 1 + \cdots\cdots + 1)}a = \underset{(1)\qquad (2)\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (n)}{1.a + 1.a + \cdots\cdots + 1.a}$$

即ち

$$na = a + a + \cdots\cdots\cdots + a$$
$$= an$$

にしてこは即ち(6)に外ならず。

一個の定まりたる數 a に相異なる數 b、b' を乘じて得らるべき積

$$ab,\ ab'$$

は亦相異なる數にして、其大小は b、b' の大小に伴ふ。是故に又 ab, ab' の大小、相等は必ずそれぞれ b、b' の大小相等に伴ふ。其故如何にといふに、今假に $b > b'$ なりとせば $b = b' + d$ なるが如き數 d は必ず存在し、從て

$$ab = a(b' + d) = ab' + ad$$

よりて

$$ab > ab'$$

なり。よりて又 b が b' より小なるときは b と b' との位地を轉倒して此論法を適用し、此場合には ab の ab' より小ならざるべからざるを知るべし。故に又 $ab > ab'$ ならば $b > b'$ ならざるを得ず、如何といふに。b 若し b' より大ならずとせば ab は ab' より大なることを得ざればなり。よりて又 $ab < ab'$ ならば $b < b'$ ならざるを得ず。隨て $ab = ab'$ なるときは、必ず $b = b'$ なるこ

とを知るべし、何となれば b 若し b' より大又は小ならば ab も又 ab' よりも大又は小にして、此二つの積相等しきを得さればなり。

今 a を定まれる數となし、之に順次1、2、3……を乘じて

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots,\ ma,\ \ldots$$

を作るときは、此等の數はこゝに書き列べたるまゝにて其大さの順序を成せり、其最初の者は卽ち a に等しく、第二以上は皆 a より大なり。此等の數を a の倍數といふ。a の倍數は a 自らの外は盡く a より大なれども、a より大なる數は必ず a の倍數なりといふことを得ず。現に a が1より大なるときは $a+1$ は a より大なり、然れども此數は $a+a$ 卽ち $2a$ よりも小、隨て其他の a の倍數よりも小なるべく、$a+1$ は a の倍數なることを得ざるにあらずや。

c なる數が a の倍數なるときに限り

$$c = a.b$$

なる如き數 b は存在す、而かも斯の如き數 b は唯一個に限り存在することを

得。c が a の倍數なる場合に於て此 b なる數を定むべき算法を除法といふ。c は此除法の被除數(又は實) a は除數(又は法)にして b は商なり。

$$c \div a = b$$

は此事實を書き表はすべき記法なり。

除法の乘法の逆なるは猶減法の加法の逆なるが如し、唯減法可能の條件は被減數が減數よりも大なるべきの一事に止まれども、除法の場合に於ける被除數と除數との關係はしかく簡單ならざるの點少しく趣を異にせり。

(三)

物を數へたる結果を數となすてふ、數の觀念の起因に固着して一歩も之を離るゝことを肯ぜずば、零の觀念は數のそれの背後を限れる一障壁たるに過ぎず、是故に吾人の常識は數として零を認許することなし。然れども零といふ數なき數學は極めて不便なる數學なりと謂はざるべからず。

數學の所謂數は零を包括す。數としての零の性質及其四則算法の意義は次の

如し。

一、aを0にあらざる數となすときはaは0より大なりとす。こは畢竟0を直ちに1に先てる數、隨て0を最初の數、1を0に次げる數となすなり。

二、aを如何なる數となすとも

$$0+a=a, \quad a+0=a$$

隨て特に$0+0=0$とす。減法は加法の逆なりとの規定を固執するときは之よりして

$$a-0=a, \quad a-a=0, \quad 0-0=0$$

を得。

加法の組み合はせの法則及交換の法則は、關係せる數の中に0を加ふるも、仍成立すべし。$a-b$なる減法はaがbより小ならざるときは常に唯一の結果を與ふ。

三、

$$0.a=0 \quad a.0=0$$

によりて0の關係せる乘法の意義を定む。0なる數a個の和を$0 \cdot a$なりとせば、其0に等しきことは既に二に含まれたり。除法を乘法の逆とすれば、

$$0 : a = 0$$

なり。

乘法の組み合はせの法則、交換の法則及加法に對する分配の法則は0の關係せる場合にも仍成立す。$a : b$なる除法の可能なるとき其結果唯一なりといふ事實はa、b共に0となる場合に其意義を失ふ。$0 : 0$は其實如何なる數にてもあり得べし、斯の如き奇異なる場合は之を除法の圏外に排斥するを宜とす。$0 : 0$は一定の意義なき記號なり。aが0にあらざるとき$a : 0$の不可能なることは勿論なり。

(四)

加法及乘法は組み合はせの法則及交換の法則に遵ふが故に、多くの數を加へ又は乘ずるに當りて、其順序を如何樣に變更するとも結果は常に同一なり。此

事實は既に前文に於て屢々默認せられたり。

吾人は今ギリクレーに從ひて此事實の嚴正なる證明を與へんとするに際して此問題を最廣の意義に解釋し、以て後章、同趣の論法を反復するの煩を避けんとす。

加法、乘法等に於けるが如く、凡て二つの定まりたる數を與ふるとき之より一定の法則に從て第三の數を定むる手續きを一般に算法といふ。今a、bなる二數に或る定まりたる算法を施こして得たる結果を表はすに

$$(a, b)$$

なる記法を以てす。一般に言へば算法の結果は與へられたる二數の順序に關係すべきこと勿論なり、例へば減法、除法の如き是なり。加法、乘法の如く與へられたる二數の順序が結果に影響を及ぼすことなく、卽ち常に

$$(a, b) = (b, a)$$

なる關係成立するときは、此算法は交換の法則に從へるなり。

又三個の數 a、b、c の與へられたる時は先づ a、b に此算法を施こして得たる結果 (a, b) と c とに同一の算法を施こすことを得、其最終の結果は卽ち

$$((a, b), c)$$

なり、若し先づ b と c とに此算法を施こして (b, c) を得、次に a と (b, c) とに同一の算法を施こさば

$$(a, (b, c))$$

を得。斯の如くにして得られたる兩樣の結果必しも相等しからざるは減法又は除法の場合に於て吾人の經驗する所なり、例へば 8、4、2 なる三個の數につきて

$$(8 - 4) - 2 = 2 \qquad 8 - (4 - 2) = 6$$

$$(8 : 4) : 2 = 1 \qquad 8 : (4 : 2) = 4$$

なるが如し。

加法及乘法に於ける如く、一般に

$$((a, b), c) = (a, (b, c))$$

なる關係成立するときは、此算法を組み合はせの法則に從ふものとなす。

さて吾人の證明せんとする事實は次の如し。

組み合はせの法則及交換の法則に從ふ算法を多くの數に順次施行するときは其順序は最後の結果に影響する所なし。

此事實を分析して之を最も明白なる言辭に表はすときは次の如し。

a、b、c……等n個の數の與へられたる時、之を一括してsと名づく。sの諸數の中より任意に二つ、例へばa、bを採り出し、之に代るに(ab)なる一個の數を以てするときは、茲に(ab)、c、d……等$n-1$個の數を得、之を一括してs'と名づく。さてs'より同樣の手續きによりて$n-2$個の數より成れるs''なる一組を作り、順次斯くなし行くときは、竟には唯一個の數に到着す。茲に每次採り出すべき二個の數は全く隨意なるべきにより、此手續きは種々の順序に成され得べしと雖、若し所定の算法にして組み合はせの法則及交換の法則に從ふものなるときは、最後に到達せらるべき唯一の數は算法を行へる

順序の異同には關係あることなし。

例へば三個の數 a、b、c の與へられたるとき、上文の手續きは次の十二様の順序によりて成され得べし、

$$S:\quad a,\ b,\ c.$$

	S'	S''	
1)	$(a, b), c$	$((a, b), c)$	(I)
2)	$(a, b), c$	$(c, (a, b))$	
3)	$(b, a), c$	$((b, a), c)$	
4)	$(b, a), c$	$(c, (b, a))$	

	S'	S''	
5)	$(a, c), b$	$((a, c), b)$	(II)
6)	$(a, c), b$	$(b, (a, c))$	
7)	$(c, a), b$	$((c, a), b)$	
8)	$(c, a), b$	$(b, (c, a))$	

	S'	S''	
9)	$(b, c), a$	$((b, c), a)$	(III)
10)	$(b, c), a$	$(a, (b, c))$	
11)	$(c, b), a$	$((c, b), a)$	
12)	$(c, b), a$	$(a, (c, b))$	

此中(I)、(II)、(III)に纏められたる各四樣の順序が同一の結果を與ふることは交換の法則によりて明白なり。又(1)の結果と同一なることは卽ち組み合はせの法則なり。さて(8)と(10)の結果と同一の結果を與ふるにより畢竟、此等十二樣の順序によりて到着せらるべき最後の結果は盡く同一なり。吾人の證明せんとする定理は n の 3 なる時には既に成立せり。一般の場合に於て當面の定理を證明するには數學的歸納法を用ゐるを便なりとす、卽ち先づ此定理は關係せる數が n よりも少數なるときには既に成立せるものと做し、然る上は n 個の數の關係せる場合に於ても此定理必ず成立すべきことを辨明するなり。此辨明にして承認せられなば n が 3 の場合に成立せる當面の定理は四個の數につきても、從て又五個の數につきても成立すべく、斯くて一般に成立すべきなり。

今

(S) $a, b, c, d, e, \ldots \ldots \ldots$

なる n 個の數の與へらるゝとき此中二個例へば a、b を採り出し (a, b) を以て之に代ふるときは $n-1$ 個の數よりなれる一組 S' を得、

$$(S')\qquad (a, b),\ c,\ d,\ e,\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

さて S' の既に定まりたる上は S' より S'' に移り、S'' より S''' に移りて最後の結果に到達するに際しては、毎次の算法の順序を如何ようになすとも常に一定の結果を得べきことは假に容認せる所なり。是故に今は唯最初に採り出すべき二數の選擇が最終の結果に影響なかるべきことを確むれば則ち足る。

最初の二數の選擇は樣々あり得べしと雖も其 a、b と異なるは畢竟次の二樣の範疇を逸することなし。其一は a、b と全く別に c、d なる二個を採るなり、又其一は a、b の中一個、例へば a と更に第三の一數 c とを採るなり。

若し c、d を採らば $\bar{S}'$ は

$$(\bar{S}')\qquad a,\ b,\ (c, d),\ e,\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

なる $n-1$ 個の數より成る。S' より發足すると $\bar{S}'$ よりすると最終の結果異な

るべきか。S' の中 c、d に代ふるに (c, d) を以てし、又 $\bar{S}'$ の中 a、b に代ふるに (a, b) を以てするときはいづれも、

$$(S'') \quad (a, b), (c, d), e, \cdots\cdots$$

なる $n-2$ 個の數を生ず。S' より發して到着すべき最後の結果は S'' を經て到着し得べく、$\bar{S}'$ より發するも亦然るが故に、此二樣の順序は同一の終局に歸着すべし。

若し又 S の中 a、c を採りて

$$(\bar{S}') : \quad (a, c), b, d, e, \cdots\cdots$$

を作るとき、之を S' と比較せんが爲に

$$(S'') : \quad ((a, b), c), d, e, \cdots\cdots$$

$$(\bar{S}'') : \quad ((a, c), b), d, e, \cdots\cdots$$

を作るに S' より發して到着せらるべき最後の結果は必ず S'' を經て到着せらるべく、又 $\bar{S}'$ より發して到着せらるべきは必ず $\bar{S}''$ を經て到着せらるべし、さて

$$((a, b), c) = ((a, c), b)$$

なることは既に證明せられたるが故にS''も$\bar{S}''$も同一の$n-2$數より成れり、是故にS'と$\bar{S}'$とは同一の終局を與ふるを知るべし。

是に至て吾人の定理は全く成立せり。

(五)

減法、除法は加法、乘法の逆なるが故に、前者に關する或る事實を裏面より看取せるに過ぎず。加法と乘法との相似たる點は又減法と除法との上にも反射せられたり。次に掲ぐるは減法及除法に關せる重なる定理にして、其證明は皆容易なり。

減法は加法の逆なりといふ事實を次の如く言ひ表はすことを得、

一、$(a+b)-b=a$

二、$(a+b)-a=b$

三、$b+(a-b)=a$

除法は乘法の逆なりといふ事實を次の如く言ひ表はすことを得、

一、$(a\times b):b=a$

二、$(a\times b):a=b$

三、$b\times(a:b)=a$

四、 $a-(a-b)=b$

減數及被減數の雙方に同一の數を加減するとも差は變ずることなし。

五、 $(a+k)-(b+k)=a-b$

$(a-k)-(b-k)=a-b$

三つの數に加法、減法を施こすとき次の關係あり、

六、 $a-b-c=a-c-b=a-(b+c)$

七、 $a-b+c=a+c-b$

八、 $a-(b-c)=a+c-b$

九、 $a+(b-c)=a+b-c$

此等の事實を擴張して次の定理を得、加法、減法を引續き行ふべき場合に於て、不能の減法の起り來らざる限

四、 $a:(a:b)=b$

除數及被除數の雙方に同一の數を乘除するとも商は變ずることなし。

五、 $(a\times k):(b\times k)=a:b$

$(a:k):(b:k)=a:b$

三つの數に乘法、除法を施こすとき次の關係あり、

六、 $a:b:c=a:c:b=a:(b\times c)$

七、 $a:b\times c=a\times c:b$

八、 $a:(b:c)=a\times c:b$

九、 $a\times(b:c)=a\times b:c$

此等の事實を擴張して次の定理を得、乘法、除法を引續き行ふべき場合に於て、不能の除法の起り來らざる限

り、算法の順序を變換し、或は加ふべき二個以上の數に代へて其和を加へ、二個以上の減數に代へて其和を減じ、或は加ふべき數一つ、減ずべき數一つに代へて其差を加へ又は減ずるとき、終局の結果は變ずることなし。

り、算法の順序を變換し、或は乘ずべき數二個以上に代へて其積を乘じ、二個以上の除數に代ふるに其積を以てし、或は乘數一つ除數一つに代へて其商を乘じ又は除すとも、終局の結果は變ずることなし。

上に掲げたる諸式の左邊に現はれたる減法、除法は其可能なるべきを豫め定めたるものにして、右邊に現はれたるは其可能なることを證明すべき者なり。此等の諸定理の證明は次の例に倣ふべし。

五の證。$a+k>b+k$ なることは知られたる事實なり、今 $(a+k)=(b+k)+c$ と置く、卽ち $(a+k)-(b+k)=c$ なり、さて $(b+k)+c=(b+c)+k$ よりて $a+k=(b+c)+k$ 隨て

$$a=b+c$$

是故に $a - a$ なる減法は可能にして其結果は e なり、五の後の一半を證明するには七を用ゐるべし。

八の證。$a:(b:c)$ なる式は兩度の除法を包む、此等の除法はいづれも可能なり、よりて $b:c = d,\ a:d = e$ となす、即ち

$$b = cd, \quad a = de$$

よりて $ac = dec = (cd)e = be$

$$ac : b$$

は可能にして其結果は e なり。

(六)

同一の數若干の加法より乘法を生じたるが如く、同一の因子若干の積は冪の觀念を起す。a なる因子 m 個の積を a の m 次の冪といひ、a 自らを a の一次の冪と稱す。冪の記法は次の如し、

$$a^1 = a \qquad (1)$$

$$a^m = a.\,a.\,a.\cdots\cdots\cdots a \qquad (2)$$
(1)(2)(3) (m)

a を此冪の基數 m を其指數といふ。指數の大小は冪の階級の高低を定む。第二次、第三次の冪を特に平方、立方といふ。

冪に關する諸定理は乘法の諸定理と同様にして容易に證明し得べし、

一、基數を同じくする冪の乘法及除法は指數の加法及減法に歸す、

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (3)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m > n) \qquad (4)$$

げにも等式(3)の兩邊はいづれも a なる因子 $m+n$ 個の積に等し、(4)は(3)を轉倒せるに過ぎず。

此定理を冪の數二個よりも多き場合に擴張して

$$a^{m_1}\,a^{m_2}\cdots\cdots\cdots a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \qquad (5)$$

を得。

二、冪の冪を作るには指數を乘ずべし、卽ち

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (6)$$

(5)に於て m_1、m_2……m_n を盡く m に等しとなさば(6)を得べし。

三、指數を同じくせる冪の乘法は基數の乘法に歸す。

$$a^n b^n = (a.b)^n \qquad (7)$$

$$a^n b^n c^n \ldots\ldots = (abc \ldots\ldots)^n$$

若し(7)の第二の等式に於て a、b、c……を盡く a に等しとし其數 n なりとせば再び二を得べし。a 若し b の倍數ならば

$$a^n : b^n = (a:b)^n \qquad (8)$$

1の凡ての階級の冪は1に等し、基數1より大ならば冪の大小は指數の大小に伴ふ、指數の同一なる冪の大小は基數の大小に伴ふ、卽ち

$m > n$ ならば $a^m > a^n$ $(a > 1)$

$a > b$ ならば $a^k > b^k$

b を1より大なる數となし、b の倍數を

$$0,\ b,\ 2b,\ 3b\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

と大さの順序に書き竝べたりとするとき、a なる數が若し b の倍數ならずば、そは必ず相隣れる b の二つの倍數の間にあり、卽ち

$$bq < a < b(q+1) \qquad (1)$$

なるが如き數 q は必ず存在す。

こゝに書き竝べたる b の倍數を0より始めて順次一つ一つ採りて之を a と比較し行くに、先づ0は a よりも小なり、b 若し a より大ならば a は0と b との間にありて q は卽ち0なり、b 若し a より小ならば $2b$ を a と比較すべし、$2b$ 若し a より大ならば a は b と $2b$ との間にありて q は卽ち1なり、$2b$ 若し a より小ならば $3b$ を a と比較すべし。此手續きを順次反復するときは竟に q なる數に到達せざるを得ず、若し然らずば b の倍數は皆 a よりも小なりといふ許すべからざる結論に陷るべし。現に ab は b の倍數にして

a より小ならず。

(1)の條件に適すべき數 q の存在すべきことは既に知れり、今

$$a - bq = r$$

とすれば

$$r < b$$

卽ち

$$a = bq + r,\quad r < b. \qquad (2)$$

a 若し b の倍數ならば $a : b = q$, $r = 0$ として此式仍成立すべきが故に、畢竟 b は0とは異なる數なりとするときは、a が如何なる數なりとも必ず(2)に示せる條件に適すべき q、r なる二數存在すと云ふことを得。

又 a、b を與へたる上は(2)に適すべき q、r の二數は共に一定のものなり、語を換へて之を言はゞ

$$a = bq' + r' \qquad r' < b$$

なる條件が(2)と同時に成立するときは $q = q'$, $r = r'$ ならざるを得ず。

其故如何にといふに、此等の二條件同時に成立するとき若し q' にして q より大ならば q' は少なくとも $q+1$ に等しく、隨て bq' は少なくとも $bq+b$ に等しくして $bq+b$ 卽ち a よりも大となるべし。是故に q' は q より大なることを得ず。又同樣にして q' の q より小なることを得ざるべきを證明し得べし。よりて q、q' は相等しからざるを得ず、q、q' 既に相等しからば r、r' も亦た等し。

a、b なる二數より(2)によりて q、r を定むる手續きを仍ほ除法といひ、q を此除法の商 r を其剩餘といふ。剩餘は必ず法より小なり。剩餘0なるは卽ち整除の場合にして、剩餘0ならざるときは特に商を不完全なる商と云ふことあり。

b の倍數にして其大さ a を超えざるもの丶中最大なるは卽ち bq にして、r は $a-bq$ を b の倍數となすべき最小の數なり。

上文說ける所の重要なる定理は更に之を擴張することを得。

1より大なる一數 e を採りて之を法となし、任意に與へられたる數 a を除し商 q_1 及剩除 r_1 を得たりとするとき、再び e を以て q_1 を除し商 q_2 及剩餘 r_2 を得、更に e を以て q_2 を除し商 q_3 及剩餘 r_3 を得、逐次斯の如く一回一回得來る所の商を更に e を以て除し行くときは、q_1 は a よりも小、q_2 は q_1 よりも小、後に得る所の商は常に前に現はれたる者よりも小にして、a よりも小なる數は其數限りあるが故に、遞次得る所の商は次第に減少し行きて究局 e よりも小とならざるを得ず。今 q_{k-1} は e よりも小なりとせば q_k は 0 にして r_k は q_{k-1} に等し、即ち

$$a = q_1 e + r_1, \quad r_1 < e,$$
$$q_1 = q_2 e + r_2, \quad r_2 < e,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$q_{k-1} = q_k e + r_k, \quad r_k < e, \quad q_k = 0, \quad r_k = q_{k-1}.$$

等の式を得、之を一括して

$$a = r_k e^{k-1} + r_{k-1} e^{k-2} + \cdots \cdots + r_2 e + r_1.$$

を得、こゝに r_1、r_2……r_k はいづれも e より小なる數にして、最後の r_k の外は0なることあり得べし。

是故に凡ての數は1より大なる數 e の種々の階級の冪に、e より小なる係數を乘じて得らるべき積の和として之を表はすこと、卽ち e の冪級數に展開することを得。

(3)に表はされたる a の展開の記法を省略し、單に係數のみを幷べ記して、

$$a = (r_k\ r_{k-1}\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ r_3 r_2 r_1)$$

と書くことを得、こゝに r_1、r_2……等を幷べて書けるは乘法を示せるには非ざることを明にせんが爲に特に括弧を用ゐたり。數を斯の如く展開することを e を基數とせる命數法と云ふ。十といふ數を基數とせるときは卽ち常用の十進法を得。或數を命數法に從ひて書き表はしたるとき其係數の數を此數の桁又は位の數と云ふ r_1、r_2……は順次第一位、第二位……の係數なり。

十進法を採りて、1より9に至る數には個々特別の命名をなし、9の次の數

を t とし t、t^2、t^3、t^4 をそれぞれ十、百、千、萬と名づけ、

$$at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \quad (a, b, c, d, e < t)$$

の如き數を

$$a\ 萬\ b\ 千\ c\ 百\ d\ 十\ e$$

と呼ぶは我邦の命數法なり。此方法に從ふときは、僅に十三個の語を組み合はせて一より9999に至るすべての數に命名することを得、此法は全く古希臘の命數法と符合せり。

然れども我邦の命數法は此十三個の詞を用ゐて t^8 より小なるすべての數に命名す、例へば

$$at^7 + bt^6 + ct^5 + dt^4 + a't^3 + b't^2 + c't + d'$$

と展開せられたる數は之を

$$(at^3 + bt^2 + ct + d)t^4 + a't^3 + b't^2 + c't + d'$$

と書きて

$$a\ 千\ b\ 百\ c\ 十\ d\ 萬\quad a'\ 千\ b'\ 百\ c'\ 十\ d'$$

と名づく、若し更に t^8 を億と名づくれば、同一の方法によりて t^{16} より小なる

即ち十二桁以下のすべての數に命名することを得べし。要するに此命數法は四位を以て一節とし t 及 t^4 を第一段、第二段の基數となし、先づ t^4 を法として或る數を例へば、

$$At^8+A't^4+A''$$

の如く展開し、こゝに現はれ來れる、いづれも t^4 より小なるべき係數 A、A'、A'' をば更に t を法として

$$A = at^3+bt^2+ct+d$$
$$A' = a't^3+b't^2+c't+d'$$
$$A'' = a''t^3+b''t^2+c''t+d''$$

の如く展開して、四桁以下の數の命名法を重用するを主眼とするなり。

十進の命數法は數を言語に表はして日用の需要に應ずるの點に於て遺憾あることなし、然れども數を簡明に書き表はす方法を與へて數學の進步を助成せるはアラビヤ數字を用ゆる記數法なり。古希臘に於て數を取扱ふ數學の發達が幾何學の進步に伴はざりし所以は明透なる記數法の缺如せること其最大な

る原因の一ならずとせんや。

e を基數とせる記數法に於て一般に桁數 k なる數 a は次の不等式に適合すべし、

$$e^k - 1 \geqq a \geqq e^{k-1}$$

例へば十進法に於て桁數 k なる數は 10^{k-1} 卽ち 9 を k 個幷べて書き表はさるる數よりも大ならず、又 10^{k-1} 卽ち 1 の右に 0 を $k-1$ 個幷べて書き表はさるる數よりも小ならず。

げにも

$$a = (p_k p_{k-1} \cdots\cdots\cdots p_2 p_1)$$

$$= p_k e^{k-1} + p_{k-1} e^{k-2} + \cdots\cdots\cdots + p_2 e + p_1$$

となすときは $p_1, p_2 \cdots\cdots p_k$ はいづれも e より小、卽ち多くとも $e-1$ に等しきが故に

$$p_k e^{k-1} \leqq (e-1)e^{k-1} = e^k - e^{k-1}$$

$$p_{k-1} e^{k-2} \leqq (e-1)e^{k-2} = e^{k-1} - e^{k-2}$$

……………………

$$p_2 e \leqq (e-1)e = e^2 - e$$

$$p_1 \leqq e - 1 = e - 1$$

隨て

$$a \leqq e^k - 1$$

自ら明了なるべし。

是れ當面の不等式の前一半なり、其後一半は a の最高位の係數 p_k の決して 0 たること能はず、隨て少なくとも 1 に等しからざるを得ざることに注意せば基數を同じくせる記數法によりて書き表はされたる二つの數の大小は第一其桁數の大小に從ふ、桁の數同じき二つの數にありては最高位の係數の大小、或は同位にして係數異なる最高位の其係數の大小に從ふ。

實にも第一 a は桁數 k、a' は桁數 k' にして $k' > k$ ならば上に證明せる所により、

$$a' \geqq e^{k'-1} \geqq e^k > a$$

第二、a、a' は桁數共に k にして最高位の係數 a にありては p、a' にありては p' にして $p' > p$ なりとせば、

$$a' \geqq p'e^{k-1}$$

さて $p' > p$ 即 $p' \geqq p + 1$ より

$$a' \geqq pe^{k-1} + e^{k-1}$$

を得。又 a の最高位一桁を消去したる後殘留する所の記號の表はせる數は桁數 $k-1$ なるが故に e^{k-1} よりも小なり、而して此數に pe^{k-1} を加ふれば a を得べきにより、

$$pe^{k-1} + e^{k-1} > a$$

即ち

$$a' > a$$

なり、若し又 a、a' に於て最高位若干の係數は相一致し e^{k-1} の位に至りて始めて相異なる係數を有し、其係數 a にありては q、a' にありては q' にして $q' > q$ なりとせば a、a' は次の如き形を成すべし、

$$a = (p \cdots \cdots q \cdots \cdots \cdots) = (p \cdots \cdots) e^k + b$$

$$a' = (p \cdots \cdots \cdots q' \cdots \cdots \cdots) = (p \cdots \cdots) e^k + b'$$

こゝにb、b'と書けるはそれぞれa、a'の展開の左端より相一致せる部分を消去せる後殘留する所のいづれも桁數kなる數にして、b、b'の最高位の係數はq、q'なり。是故にb'はbよりも大きく、隨て之に同一の數$(p \cdots\cdots)e^k$を加へて得らるべき和につきてもa'はaよりも大なるを知るべし。

斯の如く展開の係數を比較して數の大小を識別し得べきにより、總て又凡ての數は基數の定まるとき唯一の展開を有することを知るべし。

(八)

數ありて後命數法あり、命數法は數を表はす方法のあまたあり得べきが中の一なるに過ぎざることを再び繰り返さんはくだくだし、十進法に於ける四則卽ち加減乘除の演算に於ても亦思想の本末先後につきて同樣の注意を要するの點あり。

通常四則の演算と稱するは十進法にて表はされたる二個以上の數の間に加法、減法、乘法又は除法を施こして得らるべき結果を再び十進法に表はさんとするを目的とし、其爲に設けたる、成るべく簡短にして秩序ある手續きたるに過ぎず、卽ち是れ算法を實行するの手段種々あり得べきが中の一なり。されぱかゝる演算の方法定まりて後始て加減乘除算法の意義定まれるにあらざること論を俟たず。

四則演算の手段は、數ふるといふ手續きに盡きたり、如何なる演算も數ふることによりて成し得ざるはなし。唯推理の力に藉りて成るべく器械的の手續きを節約せんとする處に工夫の餘地を存ず。事實の上につきて言はゞ、かく器械的に數ふべきは十以下の數に關する算法の場合のみに限ることを得べく、此狹小なる範圍内に於ける算法の結果は之を記憶すること難からざるが故に器械的に數ふることは全く之を避け得べし。

四則演算は社會的生存に於て日用必須にして、其知識は常識ある人々の共有

り、然れども其大綱につきて此處に數言を費やすの必要あり。

加法の演算は十以下の數の加法の反復に歸す、今

$$A = (\dots\ \dots\ a_3\ a_2\ a_1)$$

$$A' = (\dots\ \dots\ a_3'\ a_2'\ a_1')$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

等の和

$$S = (\dots\ \dots\ s_3\ s_2\ s_1)$$

を求めんとするに、先づ和の第一位の數字(係數)より始むべし。加ふべき數の第一位の係數 a_1、a_1' ……… をとり之を加へて $qt + s_1$ を得たりとす、t は十を表はし s_1 は t よりも小なる數なり。しかするときは s_1 は即ち S の第一位の係數に外ならず、其故は

$$A = Q_1 t + a_1$$

$$A' = Q_1' t + a_1'$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

と書くときは

$$S = A + A' + \cdots\cdots = (Q + Q' + \cdots\cdots)t + (a_1 + a'_1 + \cdots\cdots)$$
$$= (Q + Q' + \cdots\cdots + q)t + s_1$$

にして s_1 は t よりも小なればなり。さて

$$S = S_2 t + s_1$$
$$S_2 = Q + Q' + \cdots\cdots\cdots + q$$

と書くときは S の第二位の係數 s_2 は卽ち S_1 の第一位の係數に外ならず、之を求むるには A、A'……に代ふるに其右端の一桁を消去して得らるべき Q、Q'……等の數を以てし、尚 q なる數をも倂せ採りて再び上に述べたる手續きによるべし。斯の如くして順次に S のすべての位の係數を求むることを得。

減法の演算も亦循進的なり、

$$A = (\cdots\ \cdots\ \cdots\ a_3\ a_2\ a_1)$$
$$B = (\cdots\ \cdots\ \cdots\ b_3\ b_2\ b_1) \qquad A > B$$

なる二つの數の差を

$$D = A - B = (\ldots\ \ldots\ \ldots\ d_3\, d_2\, d_1)$$

となし、先づ其第一位の係數 d_1 を求めんとするに二個の場合を區別せざるべからず。

第一、$a_1 \geqq b_1$ なるときは　$d_1 = a_1 - b_1$ なり、實にも

$$A = Pt + a_1$$

$$B = Qt + b_1$$

と置くときは P は決して Q より小ならず、而して

$$D = (P - Q)t + d_1$$

にして d_1 は t よりも小なること明なり、さて　$P = (\ldots\ldots a_3\, a_2)$, $Q = (\ldots\ldots b_3\, b_2)$ にして D の第二位の係數は　$P - Q = D_1$　の第一位の係數に同じ。

第二、$a_1 < b_1$ ならば　$d_1 = t + a_1 - b_1$ なり、此場合には　$P - 1$ は決して Q より小ならず、

$$D = (P - 1 - Q)\, t + d_1$$

にして D の第二位の係數は　$D_1 = (P - 1) - Q$ の第一位の係數なり。

斯の如き手續きにより順次 d_1、d_2、d_3 …… を求め得べし。

乘法の演算は分配の法則によりて先づ一般の場合を分解して乘數十を超えざる場合に歸着せしめ、更に乘數十より小なる乘法を分解して因子兩ながら十より小なる場合に歸着せしめ、斯くの如くにして求め得たる部分的の積を盡く加へ合はすを其主眼とす。十以下の數二個の積の表は卽ち九々の表なり。

二つの數の積の第一位の係數は此等の數の第一位の係數の積の第一位の係數なり、實にも A、B なる二數の第一位の係數をそれぞれ a、b となすときは、

$$A = A't + a, \quad B = B't + b$$

にして又 a、b の積の第一位の係數を c と名づくれば、

$$ab = qt + c$$

而して

$$AB = (A'B't + A'b + B'a + q)t + c$$

にして c は t よりも小なるが故に AB の第一位の係數は c に外ならず。

二つの數の積の位數は因子の位數の和に等しきか、或は之より少なきこと一

個なるべし。

其故如何にと云ふに A は m 位 B は n 位の數なりとすれば、

$$e^m > A \geqq e^{m-1}, \qquad e^n > B \geqq e^{n-1}$$

隨て

$$e^{m+n} > A.B \geqq e^{m+n-2}$$

是によりて積の位數は少なくとも $m+n-1$ を下らず、多くとも $m+n$ を出でざるを知るべし。

以上二個の事實は記數法の基數に拘はらず常に成立す。

(九)

比較的最複雜なる除法の演算とす、

$$A = (a_1\, a_2\, a_3 \cdots \;\; \cdots a_m)$$

$$B = (b_1\, b_2\, b_3 \cdots \;\; \cdots b_n) \qquad A > B$$

なる二個の數よりして

$$A = B.Q + R, \qquad R < B$$

なる條件に適すべき Q 及 R を求めんとす。

商の位數は $m-n+1$ 又は $m-n\ (m \geqq n)$ なるべきことは明白なり、今此二つの場合を區別すること次の如し。

A の最高位 n 個を其儘採りて作りたる數 $(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$ を B と比較するに、

第一、此數若し B より小ならずば、之を A' と名づく、然するときは、

$$A = (a_1 a_2 \ldots \ldots a_n) t^{m-n} + (a_{n+1} a_{n+2} \ldots \ldots a_m)$$

$$\geqq A' t^{m-n}$$

$$\geqq B t^{m-n}$$

よりて

$$Q \geqq t^{m-n}$$

即ち商の位數は少なくとも $m-n+1$ を下らず、然れども又 $m-n+1$ より大なることを得ざるにより、是れ實に商の位數なり。

第二、$(a_1 a_2 \ldots \ldots a_n)$ 若し B より小なるときは、

$$A < \{(a_1 a_2 \ldots \ldots a_n) + 1\} t^{m-n} \leqq B t^{m-n}$$

$$Q < t^{m-n}$$

にして Q の位数は $m-n$ より大なることを得ず、然れども又 $m-n$ より小なることあるべからざるが故に商の位数は $m-n$ なり。此場合に於ては A の最高位 $n+1$ 個の係数より作りたる數 $(a_1 a_2 \dots \dots a_{n+1})$ を A' と名づく。

第一、第二の場合を通じて商の最高位を t^k の位とす、k は第一の場合にありては $m-n$ に同じく第二の場合にありては $m-n-1$ に同じ、A に於ける左の端より n 番目又は $n+1$ 番目の位は卽ち t^k の位なり。

商の位數既に定まりたる後、

$$Q = (q_1\ q_2 \dots \quad \dots \quad \dots q_{k+1})$$

の各々の位の係數は最高位より始めて循進的に求め得らるべし。

例一、

$$A = 76254, \quad B = 63$$

$$A' = 76, \quad A = 76 \times 10^3 + 254 > B \times 10^3$$

$$Q > 10^3$$

商は四桁の數なり。

例二、 $A = 230689,\quad B = 394$

$A' = 2306,\quad A = 2306\times 10^2 + 89 > B\times 10^2$

$Q > 10^2$

商は三桁の數なり。

第一、第二の場合に於て別々に定めたる A' なる數は明に Bt よりも小なり、今

$$(q_1 + 1)B > A' \geqq q_1 B \qquad (q_1 < t)$$

によりて q_1 を定むればこは卽ち Q の最高位の係數なり。實にも

$$A \geqq A't^k \geqq B.q_1 t^k$$

又 $B(q_1+1) > A'$ なるにより $B(q_1+1) \geqq A'+1$ 隨て

$$B.(q_1 + 1)t^k \geqq A't^k + t^k > A$$

卽ち

$$B.(q_1 + 1)t^k > A \geqq B.q_1 t^k$$

さて BQ は B の倍數にして A を超えざる者の中最大なるものなるにより、

$$(q_1 + 1)t^k > Q \geqq q_1 t^k$$

q_1の果してQの最高位の係數なるを知り得たり。

さて

$$A_1 = A - B.q_1 t^k$$

$$Q_1 = Q - q_1 t^k$$

と置くときは

$$A = B.\{q_1 t^k + Q_1\} + R$$

$$A_1 = B.Q_1 + R$$

$$Q_1 < t^k, \qquad R < B$$

にしてQの起首より第二位の係數q_2は卽ちQ_1の最高位の係數にして、こはA、Bに代ふるにA_1、Bを以てしたる後同樣の手續きによりて求めらるべきものなり、但$A_1 < B.t^{k-1}$なる場合には$Q_1 < t^{k-1}$にしてq_2は0となる、此場合には直に$A_1 = A_2$, $Q_1 = Q_2$と置きA_2及Bよりq_3を決定せざるべからず。斯の如くにして順次Qの係數q_1、q_2、q_3………を求め最後に剩餘Rに到着することを得。」

商の最高位の係數q_1は

$$B.(q_1+1) > A' \geqq Bq_1$$

なる不等式によりて決定すべきものなり。さて實際上之を決定する方法は如何。q_1は少なくとも1を下らず、多くとも9を超えざる數なるが故に1乃至9の數を點檢して之を定むることを得、卽ち先づ$9B$を求めて之をA'と比較すべし。$9B$若しA'より大ならずばq_1は卽ち9なり、$9B$若しA'より大ならば$8B$を求めて之をA'と比較すべし、斯の如くにして始めてA'より大ならざる積を得たるとき、Bに乘じたる數は卽ちq_1なり。然れども實際の計算に於ては次に述ぶる方法によりて此點檢の範圍を減縮することを得べき場合甚だ多し。

第一の場合に於てはa_1、第二の場合に於ては(a_1a_2)を採りて之をa'と名づく、さてa'をb'にて除して商pを得、又a'をb_1+1にて除し商p'を得たりとせば、求むる所のq_1なる數はp、p'の間を出でず、卽ち

$$p' \leqq q_1 \leqq p$$

なり、先づ

$$a' t^{n-1} + t^{n-1} > A' \geqq a' t^{n-1}$$

$$b_1 t^{n-1} + t^{n-1} > B \geqq b_1 t^{n-1}$$

なることは明なり、さて

$$b_1(p+1) > a' \quad 故に \quad b_1(p+1) \geqq a'+1$$

隨て

$$(p+1)B \geqq b_1 t^{n-1}(p+1) \geqq a' t^{n-1} + t^{n-1} > A'$$

よりて q_1 は $p+1$ より小即ち p より大ならざることを知る、又

$$a' \geqq (b_1+1)p'$$

$$A' \geqq a' t^{n-1} \geqq p'(b_1 t^{n-1} + t^{n-1}) > p'B$$

よりて q_1 は p' より小なることを得ざるを知る。

是故に q_1 を捜索するには p' 乃至 p の諸數を點檢すれば則ち足る、B の首めより第二位の係數 b_2 が 0 に近ければ q_1 は p に近く、又 b_2 が 9 に近からば q_1 は p' に近し。

例へば例二に於て $a'=23$ 之を 3 及 4 にて除し $p=7$, $p'=5$ を得、q_1 は 7、6、

5の中いづれか一つなることを知る、實は $q_1=5$ なり、$394\times 5d^2=1970d^2$ を A より引きて、

$$A_1=33689$$

を得、A_1、B につきて同一の手續きを反復して商の第二位の係數を求めん爲に先づ

$$A_1'=3368$$

をとり q_2 の8なることを知る、以下類推すべし。此演算は實際に於ては次の如く排列せらるゝことは、人のよく知る所なり。

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & \quad B \\
A \ldots\ldots & 230689 & 3\ 9\ 4 \\
\cline{3-3}
Bq_1 \ldots & \underline{1970} & 5\ 8\ 5 \\
A_1' \ldots\ldots & 3368 & q_1\ q_2\ q_3 \\
Bq_2 \ldots\ldots & \underline{3152} & \\
A_2' \ldots\ldots & 2169 & \\
Bq_3 \ldots\ldots & \underline{1970} & \\
A_3'=R \ldots\ldots & 199 &
\end{array}
$$

第三章　負數、四則算法の再審

廣義に於ける整數の定義、其命名、アルキメデスの法則、數學的歸納法の原理〇加法及其性質〇正數及負數、減法の可能、絕對値〇乘法及其性質、除法、

(一)

負數の觀念を說明するに當りて、吾輩は第一章に揭げたる順序數の原則を考究の基點となさんとす。

順逆兩面に亙りて限りなく連續せる、(例へば西曆の年號の如き)ものゝ順序を表はさんとするに當りて、單に第一章に說きたる順序數のみを用ゐるときは、應用の敏活を缺くこと甚しく、稍複雜なる問題に遭遇するときは、多數の場合を區別するを避け難く、其煩殆ど堪ふるべからず。此弊を矯めんと欲せば、數の範圍を擴張して所謂負數(負の整數)を導入せざるべからず。

然れども吾輩は或る特殊の應用上の傾向に固着せずして最、抽象的に此廣義

の「數」の意義を定め、且此機會を利用して再び四則算法の意義を精密に審査せんとす。

所謂廣義の數は次の條件によりて定めらるゝものなりとす。

一、凡て相異なる二つの數の中、いづれか唯一つは他の一つより大なり。

甲、乙、丙なる數ありて、甲は乙より大、乙は丙より大ならば、甲は又丙より大なり。

甲が乙より大なるときは、乙は甲より小なりといふ。よりて、甲は乙より小、乙は丙より小ならば、甲は又丙より小なり。

二、凡て數には直ちに之に次ぐ數あり、又直ちに之に先だつ數あり。

乙が直ちに甲に次ぐとは、甲より大にして、乙より小なる第三の數存在せざるを謂ひ、乙が直ちに甲に先だつとは甲が直ちに乙に次ぐを謂ふ。

三、相異なる數甲、乙の中乙を甲より大なりとせば、甲より直ちに之に次ぐ數に移り、又此數より直ちに之に次ぐ數に移り、次第に斯の如くなし行きて竟

に乙に到達することを得。

以上は數及び大小といふ語の定義なり。何故に數はかくあらざるべからざるかといふは意義なき疑問なり。姑らく吾人は數の觀念を失へりとすべし、是時に當りて卒然吾人の面前に、投ぜられたるは上文の定義にして、數とはかゝるものぞと告げられたる吾人は此三個條の規定を前提となして、こゝに定められたる「數」なるものゝ性質を研究せんとす、是吾人の立脚點なり。若此立脚點を忘するときは、或は恐る、後文説明の途上、三段論法の迷宮裡に沒入して茫然自失するに了らんことを。

吾輩は先づ上の三個の條件の最直接なる論理的結果の二三を擧げんとす。

順序數の原則として第一章に列擧せる四個條と上文の規定とは、先づ其第二條に於て相背馳せり。凡て數には直ちに之に先てる數ありとなせるが故に、數に最小の者あるを得ず、是れ第一章の第四條を否認せるなり。又凡て數には直ちに之に次ぐ數ありとなせるが故に、數に最大の者あることを得ず。

第二條に於て凡て數には直ちに之に次ぐ數及直ちに之に先たつ數あるべきを言へり。さて斯の如き數は各唯一個に限り存在することを得。或一つの定まりたる數 a を考ふるに、a' 若し直に a に次ぐ數なるときは、a' と異なる數 a'' は直に a に次ぐ數にはあらず。其故如何にといふに a' と a'' とは異なるが故に第一條によりて a'' は a' より大なるか又は a'' は a' より小ならざるを得ず。a'' 若 a' より大ならば a'' は直ちに a に次ぐ數にあらず。又 a' は直ちに a に次ぐ數なるにより、a、a' の中間第三數あるを容さず、隨て a'' 若 a' より小ならば a'' は a と同じ數なるか又は a よりも小なる數ならざるを得ず。いづれにしても a'' は直ちに a に次ぐ數には非ず。直ちに a に先てる數につきても亦同じ。」

b 若し a より大ならば、a より直ちに之に次ぐ數に移り、此數より又直ちに之に次ぐ數に移り、次第に斯くなし行きて竟に b に到達することを得べしとは第三條の規定なり。さて、各の數には直ちに之に次ぐ及び直ちに之に先だつ唯一個の數あるべきにより、斯の如くにして a より b に移り行く徑路を遡り

て b より a に到達することを得べきや必せり。

斯の如くにして a より b に又 b より a に到達し得べしといふ事實をアルキメデスの法則といふ。

アルキメデスの法則は數學的歸納法の基礎をなす。正又は負の整數の關係せる定理を證明せんとするに當り、先づ其證明の第一段に於て此整數を或一個の特別なる數例へば n_0 となすとき、此定理の成立すべきを辨明し、次に第二段に於て、姑らく此定理は一般に該整數が n なるとき成立せるものと假定し、さて然る上は此定理は必ず又直ちに n に次ぐ數につきても成立せざるべからざることを辨ず。しかするときは此定理は既に n_0 につきては成立せるが故に又直ちに n_0 に次げる數につきても成立すべく、既に直ちに n_0 に次げる數につきて成立せる上は、又直ちに此數に次げる數につきても成立すべく、一般に n_1 を n_0 より大なる任意の數なりとせば、次第に斯くの如く推して竟に此定理は n_1 につきても、即ち n_0 より大なる如何なる數につきても成立すべきことを確む

るを得。若し第二段に於て n より直ちに n に先てる數に推移することを得ば、此定理は又凡て n_0 より小なる數につきても成立すべきことを知るべし。或は第二段に於て、n_0 から n に至る凡ての數につきて此定理正當なりと假定し、此假定を前提として、此定理の直ちに n に次ぎ、又は直ちに之に先だてる數につきても正當なるべきを證明するも亦可なり。凡ての場合に於てアルキメデスの法則が此論法の骨子なるを看取すべし。

數の中より任意に一つを採りて之を 0 と名づく、直ちに 0 に次ぐ數を $\overrightarrow{1}$、直ちに $\overrightarrow{1}$ に次ぐ數を $\overrightarrow{2}$……と名づけ、又直ちに 0 に先だつ數を $\overleftarrow{1}$、直ちに $\overleftarrow{1}$ に先だつ數を $\overleftarrow{2}$ と名づく。小なる數を左、大なるを右にして、數の順序は次の如し。

$$\cdots\cdots\ \overleftarrow{3},\ \overleftarrow{2},\ \overleftarrow{1},\ 0,\ \overrightarrow{1},\ \overrightarrow{2},\ \overrightarrow{3}\ \cdots\cdots$$

0 より大なる數を正數、0 より小なる數を負數といふ、0 は中性の數なり。

數字の上に附記せる箭は、其數の符號にして、常用の記法に於ては + 又は − を

數字の前に置きて、之を表はす。此一節に於て故らに常用の記法に乖けるは、依りて論理の了解を扶けんが爲なり。a、n の如き文字を以て數を表はせる場合には、此文字は數字を代表せるにあらずして、一つの數を(數字及符號を併せて)表はせるものなりとす。又「直ちに a に次ぐ數」、「直ちに a に先だつ數」を表はすに a^{+}、a^{-} なる記號を用ゆ、是れ卽ち常用の記法にて $a+1$、$a-1$ と書かるべきものなり。「直ちに a に次ぎ、又は直ちに a に先てる數」といふべき場合には $a^{\pm}$ を用ふ。同一の算式の中にて、$\pm$ 又は $\mp$ の重記號を用ふる場合には、各處上號、又は各處下號を採りて、二個の事實を得べきことを示せり。例へば0^{+} は $\overrightarrow{1}$、0^{-} は $\overleftarrow{1}$、又 $(\overrightarrow{1})^{+}$ は $\overrightarrow{2}$、$(\overrightarrow{1})^{-}$ は 0 を表はし、

$$(\overrightarrow{3})^{\pm} > (\overrightarrow{2})^{\pm}$$

は $(\overrightarrow{3})^{+} > (\overrightarrow{2})^{+}$ 及 $(\overrightarrow{3})^{-} > (\overrightarrow{2})^{-}$ を併せ表せるが如し。

凡てある數に直ちに次げる數及直ちに先てる數は各唯一個に限り存在せるが故に、

$$(a^{\pm})^{\mp} = a$$

又 $a^{\pm}=a$ と $a^{\mp}=a$ とは同一の事實を表せり。

(二)

廣義の數に適用せらるべき一種の算法を次の等式によりて定むべし。

$$\text{I.}\quad (a,\ 0)=a$$

$$\text{II.}\quad (a,\ b^{+})=(a,\ b)^{+}$$

第二等式の意義は、a と直ちに b に次ぐ數とに此算法を施こせる結果は、a と b とに此算法を施して得たる數に直ちに次ぐ數に等しといふにあり。I も II も a、b が如何なる數なりとも必ず成立すべきものとなす。

今 II に於て b に代ふるに b^{-} を以てするときは、

$$\text{II}^{*}\quad (a,\ b^{-})=(a,\ b)^{-}$$

を得、II、II* を一括して

$$\text{II}^{**}\quad (a,\ b^{\pm})=(a,\ b)^{\pm}$$

となすことを得。

I、II は循環的に凡ての數に施こせる此算法の結果を與ふ。例へば a を $\overset{\downarrow}{1}$ とせんに先づ I によりて

$$(\overset{\downarrow}{1},\ 0) = \overset{\downarrow}{1}$$

次に II によりて

$$(\overset{\downarrow}{1},\ \overset{\downarrow}{1}) = (\overset{\downarrow}{1},\ 0^{+}) = (\overset{\downarrow}{1},\ 0)^{+}$$

さて $(\overset{\downarrow}{1},\ 0)$ は $\overset{\downarrow}{1}$ にして $\overset{\downarrow}{1}{}^{+}$ は $\overset{\downarrow}{2}$ なるにより

$$(\overset{\downarrow}{1},\ \overset{\downarrow}{1}) = \overset{\downarrow}{2}$$

同趣の論法によりて

$$(\overset{\downarrow}{1},\ \overset{\downarrow}{2}) = \overset{\downarrow}{2}{}^{+} = \overset{\downarrow}{3}$$

又

$$(\overset{\downarrow}{1},\ \overset{\uparrow}{1}) = 0$$

$$(\overset{\downarrow}{1},\ \overset{\uparrow}{2}) = \overset{\uparrow}{1} \ldots \ldots \ldots$$

一般に a を如何なる數なりとするも $(a,\ 0)$ は I によりて定まれるが故に、II によりて順次 $(a,\ \overset{\downarrow}{1})$ $(a,\ \overset{\downarrow}{2})$…… 及 $(a,\ \overset{\uparrow}{1})$ $(a,\ \overset{\uparrow}{2})$……を定め得べく、$b$ を如何な

る數とするも、アルキメデスの法則により、斯の如くになし行きて竟に (a, b) を定め得べし。I. II は寔に一の算法を定むるものなり。

今數學的歸納法を用ゐて、此算法の諸性質を證明せんとす。

一、組み合せの法則、 $((a, b), c) = (a, (b, c))$

第一段、c が 0 なるときは、I により此定理成立すること分明なり。

第二段、c につきて此定理成立するものとせば

$$((a, b), c^{\pm}) = ((a, b), c)^{\pm}$$ II** による、

$$= (a, (b, c))^{\pm}$$ 假定による、

$$= (a, (b, c)^{\pm})$$ II** による、

$$= (a, (b, c^{\pm}))$$ 前に同じ、

即ち此定理は $c^{\pm}$ につきても亦成立す。

二、 $(a^{\pm}, b) = (a, b)^{\pm}$

II** にては關係せる二つの數の中後者に ± を附せり、こゝに證明せんとする定

理にありては前の數に $\pm$ を附けたり。

第一段、b が 0 なるときは此定理は I によりて、無論成立す。

第二段、記法の混亂を避けんが爲に、先づ此定理を a^+ のみにつきて證明すべし、此定理 b につきて成立すと假定せば

$(a^+, b^\pm) = (a^+, b)^\pm$　　II** による、

$= \{(a, b)^+\}^\pm$　　假定による、

$= \{(a, b)^\pm\}^+$　　$\pm$ の意義による、

$= (a, b^\pm)^+$　　II** による、

卽ち此定理は $b^\pm$ につきても仍ほ成立す。a^+ に代ふるに a^- を以てするとき亦同じ。

三、　$(0, a) = a$

第一段、a の 0 なるときは論を俟たず。第二段、a より $a^\pm$ に移らんに、II** によりて $(0, a^\pm) = (0, a)^\pm$ さて既に $(0, a) = a$ なりとせるが故に $(0, a^\pm) = a^\pm$

四、交換の法則　$(a, b) = (b, a)$

二、三は實は此法則を證明するの豫備なりしなり。第一段、b が 0 なるときは交換の法則は三によりて無論成立す。第二段、此法則 b につきて成立せりと假定せば

$$(a, b^{\pm}) = (a, b)^{\pm} \quad \text{II** による、}$$
$$= (b, a)^{\pm} \quad \text{假定による、}$$
$$= (b^{\pm}, a) \quad \text{二による、}$$

即ち交換の法則は $b^{\pm}$ につきて、隨て b が如何なる數なりとも、成立せり。組み合せの法則と交換の法則と既に證明せられたる上は第一章(四)に說きたる定理を此算法に適用し得べきこと論を俟たず。

五、　$a > b$ ならば、c を如何なる數となすとも $(a, c) > (b, c)$ なり。

a につきて數學的歸納法を適用せんに、第一段、a を直ちに b に次げる數 b^{+} となすときは、勿論 $b^{+} > b$ さて (b^{+}, c) は二によりて $(b, c)^{+}$ に等しきが故に、

$(b^+, c) > (b, c)$ 卽ち當面の定理は a が b^+ なるとき既に成立せり。第二段、a より a^+ に移らんに、$(a^+, c) = (a, c)^+ > (a, c)$ さて $(a, c) > (b, c)$ なりといふが故に、大小といふ語の意義によりて、$(a^+, c) > (b, c)$ なり。是故に、此定理は a が b より大なるときは恒に成立す。a が b より大なるときは (c, a) も亦 (c, b) より大なるべし。

六、　$a' > a$　$b' > b$ より　$(a', b') > (a, b)$ を得。

五によりて　$a' > a$ より

$$(a', b') > (a, b')$$

又 $b' > b$ より

$$(a, b') > (a, b)$$

を得、此二つの不等式は六を證明す。

七、a、b の大小、相等と (a, c)、(b, c) の大小相等とは相隨伴す。

此定理は五によりて容易に證明せらるべし。

八、此處に定められたる算法は一價の轉倒を許す。詳しく言はゞ a、c が如何なる數なりとも

$$(a, x) = c$$

なる條件に適合せる數 x は必、而も唯一個に限り、存在すべし。

之を證明すること次の如し。先づ c が a と同じ數なりとせば x を 0 となして此條件を充實することを得。今 c の與へられたるとき、a が如何なる數なりとも此條件に適合せる數 x 存在すと假定し、例へば $(a, b) = c$ なりとせば II によりて $(a, b^{\pm}) = (a, b)^{\pm} = c^{\pm}$ 是故に c に代ふるに $c^{\pm}$ を以てするときは、$b^{\pm}$ に於て、上の條件に適合せる數を得べし。是に於て數學的歸納法の兩段完きを得たり。

さて上の條件に適合せる數は a、c の定まれる上は唯一個に限りて存在し得べきは、七によりて直ちに明了なるべし。

(三)

廣義の數の中、0に先てるものを盡く除却して、唯

$0,\ \vec{1},\ \vec{2},\ \vec{3}$ ……………

のみを保存するときは、此等の數相互の間、大小の關係は、全く狹義の順序數

$0,\ 1,\ 2,\ 3$ ……………

に於けると同一にして、兩者を區別すべき所以の者全く有ることなし。廣義の數は其一部として順序數を包括せり。

前節に於て定められたる算法を0、$\vec{1}$、$\vec{2}$……のみに適用するときは、是れ即ち順序數の加法に外ならず。げにも順序數の加法はI、IIの條件に適合せること明白なり、さてI、IIは一定の算法を定むるものなるが故に、前節の算法は加法と異なることを得ず。前節に於て證明せる諸定理が順序數の加法に關せる諸定理と趣を同くせること、怪むに足らざるなり。

是故に前節の算法を廣義の數の加法と名づけ、常用の記法に従ひて(α,β)を表すに$\alpha+\beta$を以てすべし。

前節最終の定理八は順序數の場合に於けると大に其趣を異にせり。此定理は廣義の數の範圍内に於ては、加法の逆卽ち減法の凡ての場合に可能なるべきを證せり。$c = (a, b)$ を $b = c - a$ と書くときは、第二章(五)に掲げたる減法の諸定理は廣義の數につきては盡く無條件にて成立す。今其證明を反復せんは無限の耐忍を讀者に要望するに似たり。

正數.

$$\overrightarrow{1},\ \overrightarrow{2},\ \overrightarrow{3}\ \cdots\cdots$$

は順序數1、2、3……と全く同一なるが故に、今後正數を表すに其數字に冠せる箭を撤去して之を自然數と區別することなかるべし。0より小なる數卽ち負數

$$\overleftarrow{1},\ \overleftarrow{2},\ \overleftarrow{3}\ \cdots\cdots$$

は次の等式に適合す、

$$\overleftarrow{1} = 0 - 1,\quad \overleftarrow{2} = 0 - 2\ \cdots\cdots$$

一般に

$$\overleftarrow{n} = 0 - n$$

但最後の等式にありては n は正數を表はせり。此等式は數學的歸納法を用ゐて容易に證明すべきものなれば、其證明をば讀者の練習に資せんとす。

今後 $\overleftarrow{1}$、$\overleftarrow{2}$、$\overleftarrow{3}$……を表すに常用の記法

$$-1,\quad -2,\quad -3\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

を以てせんとす。

上文説明せる廣義の數を整數といふ。

此處に正數負數の大小の關係及加法、減法に關する事實の中特に一二三を反復して思想の明確を期すべし。

a、c 共に正數にして、c は a より小なるときは $c-a$ なる減法は自然數の範圍内にては不可能なり。今正數 $a-c$ を d と名づくれば

$$c-a=-d$$

にして此減法の結果は負數なり。

凡て正數は0より大、負數は0より小なり、從て凡て正數は負數より大なり。

一般に a、b を以て正又は負の數となすとき、$a-b$ が正數又は負數なるに随て a は b より大或は小なり。げにも(二)の七によりて $a-b$ と 0 との大小は $a-b+b$ 即ち a と $0+b$ 即ち b との大小に随伴すべきなり。

a、b を正數となさば $-a$, $-b$ は負數にして其大小は a、b の大小に反せり。げにも

$$(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b)$$

右邊の式を第二章(五)の定理を用ゐて變形し

$$(-a)-(-b)=b-a$$

を得。是故に

$$a \gtrless b \text{ と共に } (-a)-(-b) \lessgtr 0 \text{ 即ち } (-a) \lessgtr (-b)$$

a が如何なる數なりとも、$-a$ を以て、

$$a+(-a)=0$$

なる條件に適合せる數を表し、a $-a$ を反對の數と名づく、例へば a を 1 とせば、之に反對せる數即ち $-a$ は 1 なり。

或數を加ふるは之に反對せる數を減ずるに同じく、又或數を減ずるは之に反對せる數を加ふるに同じ。げにも $b+a$ を c と名づくれば

$$c=c+\{a+(-a)\}=\{c+(-a)\}+a$$

即ち $c+(-a)$ は

$$c=x+a$$

の x に代入して、此等式を成立せしむべき數なり、よりて

$$b=c+(-a)$$

即ち

$$b-(-a)=c=b+a$$

b に a を加ふるも又は b より a に反對せる數を減ずるも其結果同一なり $-a$ に代ふるに a を以てせば、此等式は b より a を減ずるは、b に a に反對せる數を加ふるに同じきを表せり。正數、負數を打して一團とせる廣義の數の範圍内にありては、加法、減法、其致一なり。

0は0自らに反對せる數なり。a 若し0にあらずば a、$-a$ の中一は正數にして他の一は負數なり。げにも假に a、$-a$ 共に正數或は共に負數、卽ち共に0より大又は共に0より小なりとせば、其和 $a+(-a)$ も亦或は0より大或は0より小なるべき筈なり。相反對せる二つの數の中、正數なるものを、此等の數の絕對値と云ふ、a、$-a$ の絕對値は同一なり。a の絕對値を表すに $|a|$ なる記號を用ゆ。例へば a を -5 となさば $|a|=5$.

α、β の絕對値を a、b となすときは α、β の和の式次の如し。

α、β 共に正、　　$\alpha+\beta=a+b>0$

α、β 共に負、　　$\alpha+\beta=-(a+b)<0$

α、β の中一は正、一は負、$\begin{cases} a>b & \alpha+\beta=a-b>0 \\ a<b & \alpha+\beta=-(b-a)<0 \end{cases}$

正負の數を其大さの順序に排列せる式

$$\cdots\cdots\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \cdots\cdots$$

を利用して、次の如く、加法の應用上の意義を定むることを得。曰、aに正數bを加へて得べき和は直ちにaに次げる數より順に數へて第b番目に當れる數にして、又aに負數$-b$を加ふとは直ちにaに先てる數より逆に數へて第b番目に當れる數に至るべきの謂なり、此處aの正負は措て問はざること論を俟たず。

げにも加法の意義をかく解釋するときは前節のI、IIの成立すべきこと明白なり。aには0を配し、直ちにaに次げる數には1、又直ちに之に次げる數には2を配し、次第に斯の如くなし行きて竟にbに配せらるゝ數をcと名づけんに、若し更に一歩を進めて、直ちにcに次げる數に移らば、こは勿論bの次の順序數に配せらるべきものなり。bに代ふるに$-b$を以てするときは、上の說明の中「次ぐ」と云ふ語に代ふるに「先だつ」を以てすべきなり。aにbを加ふる此手續きをbの0なる場合に適用して前節のI成立すとなすことは、よく此意義に調和せりといふべし。

同樣にして又 a より正數 b を減ずるは a には 0 を配し、直ちに a に先てる數には 1、又直ちに之に先てる數には 2……を配し行きて竟に b に配せらるべき數に至るをいひ、又 $-b$ を減ずるは逆の方向に此手續きを行ふをいふものとせば、b を減ずるは $-b$ を加ふるに同じく、又 $-b$ を減ずるは b を加ふるに同じ、といふ前に述べたる加法、減法の關係は、遺憾なく又最明亮に解釋せらるゝを見るべし。

負數は又物の數の增減を表はせるものとして解釋することを得。吾輩が特殊の應用に固着せずして、抽象的に負數及其加法、減法の意義を定めたるは、一見甚だ唐突、不自然、形式的なる觀あるに似たりと雖、熟ら考ふればかく抽象的に根本的の觀念を定むるは、却て其觀念の應用の區域を擴大する所以なるを知るべし。第一章、第二章に於て說きたる自然數の觀念及其四則算法の意義は、物に順序を賦すること及物を數ふといふ特殊の應用上の傾向を基礎となせるが故に、一方に了解し易きの利あると共に、一方には論法の蕪雜なること

及應用の範圍の始めより限定せられたるの不利あり。例へば數は長さ、時間の如き所謂量の大さを表はせるものなりと考ふるときは、再び其大小及加減乘除の意義を定め、再び其間に成立すべき關係を論證するの煩勞を反復するを避け難し。數は物の順序を表はせりとするも、物の數を表はせりとするも、或は量の大さを示せりとするも、此等特殊の應用上の意義以上に超立して動かざるは、其基本原則及四則の定義(例へば加法につきての前節のI、II)なり。數の加法を特殊の實際上の問題に應用せんとするものは、宜しく先づ其加法と稱する所のものゝ果して、よく前節のI、IIの二條件に適合せるや否やを檢すべし。若し此二條件にして充實せられなば、前節に說きたる、組み合はせの法則、交換の法則及其他の定理も盡く成立すべきなり。斯の如くにして個々の特殊なる應用上の意義につき、一々同趣の推論を反復するの勞を避くることを得べし。第二章(四)に於て算法の順序に關する一般の定理を特に加法、若くは乘法に關するものとせずして、一般の假定の上に其基礎を置きたる所以の者、

實はこゝに說きたると其精神を同じくせるなり。

（四）

（一）に於て廣義の數の加法に抽象的の定義を與へ、此定義を前提として加法の諸性質を證明せるに當りて、思想の紛亂を避けんが爲に、故らに加法の常用記法を用ゐざりし用意は、此處に再び同樣の見地より乘法を論ぜんとするに際しては、既に其要を認めざるべし。

乘法とは次の等式によりて定めらるゝ算法なり。

I.　$a.0 = a$

II.　$a(b+1) = a.b + a$

IIに於て b に代ふるに $b-1$ を以てせば

$$a(b-1) = ab - a$$

を得、之をIIと併せて

II*　$a(b \pm 1) = ab \pm a$

を得。

I、II は循環的に一種の算法を定むるものなり。例へば a が 0 なる場合につきて言はんに、先 I によりて

$$0.0=0$$

次に II* によりて

$$0.(\pm 1)=0.(0\pm 1)=0.0\pm 0=0$$

$$0.(\pm 2)=0.(\pm 1\pm 1)=0.(\pm 1)\pm 0.1=0$$

一般に

$$0.b=0 \qquad (1)$$

なるべきこと、數學的歸納法によりて容易に證明せらるべし。

又 II* を用ゐて一般に

$$a.\ 1=a$$

$$a.(-1)=-a \qquad a.(\pm 1)=\pm a \qquad (2)$$

を得。

又 a を ± 1 となすときは、前の如くにして一般に

$$(\pm 1)b = \pm b \tag{2*}$$

を得。a が ± 2、± 3 等なる場合には斯の如く簡單なる一般の結果を得ざれども乘法の結果が凡ての b につきて、或定まりたる數なることを確め得べし。

次に掲ぐる乘法の諸性質は、いづれも數學的歸納法によりて證明せらるべきものにして、其趣(二)の諸定理に同じ。

一、加法に對する分配の法則。

$$a(b+c) = ab + ac \tag{3}$$

$$(b+c)a = ba + ca \tag{4}$$

(3)の證。第一段、c の 0 なるとき此定理明白なり。c より $c \pm 1$ に移るに加法の組み合せ法則及 I、II を用ゐて

$$a\{b+(c\pm 1)\} = a\{(b+c)\pm 1\} = a(b+c)\pm a = ab+ac\pm a$$

$$= ab + (ac \pm c) = ab + a(c \pm 1)$$

特に $c = -b$ となせば(3)より

$$a.(-b) = -(ab) \qquad (5)$$

を得。是故に(3)の c に代ふるに $-c$ を以てして

$$a(b \pm c) = ab \pm ac \qquad (3^*)$$

を得。

(4)の證。a につきて數學的歸納法を適用す。a より $a \pm 1$ に移るに

$$(b+c)(a \pm 1) = (b+c)a \pm (b+c) = ba + ca \pm b \pm c$$

$$= (ba \pm b) + (ca \pm c) = b(a \pm 1) + c(a \pm 1)$$

始めにはII*に於て a に代ふるに $b + c$ 又 b に代ふるに a を以てせり。其他は加法の性質及II*の簡單なる應用に過ぎず。

特に $c = -b$ となせば

$$(-b)a = -(ba) \qquad (6)$$

を得。之を利用して

を得。

$$(b \pm c)\,a = ba \pm ca \qquad (4^*)$$

(3)、(4)を擴張して

$$a(b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots\cdots + ab_n \qquad (3^{**})$$

$$(b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n)a = b_1a + b_2a + \cdots\cdots + b_na \qquad (4^{**})$$

を得。

二、組み合せの法則。

$$(ab)\,c = a\,(bc) \qquad (7)$$

c につきて數學的歸納法を適用すべし。

$$(ab)(c \pm 1) = (ab)\,c \pm (ab) \qquad \text{II}^*$$

$$= a\,(bc) + a\,(\pm b) \qquad c\text{ につきての假定及(5)}$$

$$= a\,\{(bc) \pm b\} \qquad \text{分配の法則(3)}$$

$$= a\,\{b\,(c \pm 1)\} \qquad \text{II}^*$$

三、交換の法則。

$$ab = ba \qquad (8)$$

b が0なるときは(1)、b が±1なるときは(2)、(2*)によりて、此定理既に成立せり。b につきて数學的歸納法を適用するに特別の困難あることなし。

四、符號の法則、符號同一なる二つの數の積は正數にして、符號異なる二つの數の積は負數なり。

證。a、b 共に正數なるときは其積の正數なること明なり。さて(5)は $a\cdot(-b)$ の負數なるを示し。(6)又は交換の法則は $(-a)\cdot b$ の負數なるを示す。$(-a)\times(-b)$ は(5)によりて其符號 $(-a)b$ の符號に反す、故に $(-a)(-b)$ は正數なるを知る。

積の絶對値は因子の絶對値の積に等しきこと明白なり。

五、$a > a'$ なるとき b 若し正數ならば又 $ab > a'b$ なり、b 若し負數ならば却て $ab < a'b$ なり。

$a - a' > 0$ なるにより $(a - a')b = ab - a'b$ の符號は b の符號に伴ふなり。

自然數の乘法はI、IIの條件に適合せるが故に、此處に定めたる算法を自然數に適用する限り、其乘法と異なる結果を與ふることなきや明なり。

或は又更に一歩を進めて次の如く乘法の應用上の意義を定むることを得。曰く、或數 a に正數 b を乘ずとは a を b 個加へ合はするの謂にして、a に負數 $-b$ を乘ずとは、a に反對せる數 $-a$ を b 個加へ合はするの謂なり。更に a に0を乘ずる結果は0なりとの規約を附加するときは、斯くして定められたる算法は果してよくI、IIの二條件に適合せるものなることと明白なり。故に此算法につきても亦前に證明せる諸定理の成立すべきを知るべし。(前節結尾の注意を參照せよ)

乘法の逆は正數負數の範圍內に於ても亦必しも可能ならず、a、b の與へられたるとき

$$a = b.c$$

なる如き數 c 存在するときは、斯の如き數は唯一個に限り存在し得べし。而

して又同時に $|a|=|b|\cdot|c|$ なるが故に數の整除の問題は直ちに正數の範圍內に歸着す。

除法の可能なる場合にありては、第二章(五)に掲げたる諸定理の正數及負數の全範圍に於ても仍ほ成立すべきこと勿論なり。

第四章　整除に關する整數の性質

整除、倍數、相合式及ガウスの記法、剩餘の擴張、相合式の性質○十進法に於ける特殊なる整數の倍數の鑑識○最小公倍數及最大公約數○二つの數の最小公倍數及最大公約數、ポアンソーの幾何學的說明○一次不定方程式、一般の解答の決定、オイラーの解法○素數及合成數、合成數の素數分解、エラトステネスの篩、素數の數に限りなし○素數分解の應用

(一)

b を正數とし、其倍數

$$\cdots\cdots -3b,\ -2b,\ -b,\ 0,\ b,\ 2b,\ 3b\ \cdots\cdots$$

を大さの順序に排列するとき、a 若し b の倍數ならずば、a は必ず二個の接

續せる b の倍數の中間に落つ。今

$$qb < a < (q+1)b$$

なりとせば

$$a - qb = r$$

は b より小なる正數なり。

此觀察より直ちに次の定理を得。

一、a、b $(b > 0)$ の與へられたるときは

$$a = qb + r \qquad b > r \geqq 0$$

なる條件に適すべき整數 q、r は必ず、然も唯一組に限り存在す。(第一章(七)を參照すべし。)

例へば $a = -12,\ b = 5$ となさば

$$-3 \times 5 < -12 < -2 \times 5$$

$$q = -3,\quad r = 3.$$

b 個の連續せる整數

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ a+b-1 \qquad (b > 0)$$

の中、bを以て整除し得べきものは唯一個に限り存在す。其故如何にといふに、先づ

$$a = bq + r, \qquad 0 \leqq r < b$$

よりq及rを定むるとき、r若し0に等しからば、a既にbを以て整除し得べし。r若し0に等しからずば$k = b - r$は1、2、3……$b-1$の中の一つに等しく、而して$a + k = b(q+1)$はbを以て整除し得べし。是故に前に掲げたるb個の數の中少くとも一個はbを以て整除し得べし。然れども前に掲げたるb個の數の中bを以て整除し得べき者一個より多くあることなし、其故如何にといふにbを以て整除し得べき數二個の差は其絕對値少くともbを下らず、然るに(1)の諸數の中いづれの二個をとるも其差の絕對値はbより小なり。

是によりて考ふるに或整數が他の整數にて整除し得べきは極めて特別なる場

合に限れり。整除といふ事が整數論に於て甚だ重要なる位置を占むること、誠に故ありと謂ふべし。

a か d にて整除せらるゝときは a を d の倍數 d を a の約數と云ふ。

二、a、a' 共に d の倍數なるときは a、a' の和及差は共に d の倍數なり。

證、a は d の倍數又 a' は d の倍數なるが故に、$a = dq$, $a' = dq'$ なる如き整數 q、q' は存在す。さて $a \pm a' = d(q \pm q')$ にして $q \pm q'$ は亦整數なるが故に $a \pm a'$ は d の倍數なり。此定理は又 d の倍數二個以上の場合にも適用せられ得べし。

三、a は b の倍數、b は d の倍數ならば、a は又 d の倍數なり。

證、$a = ba'$, $b = db'$ なる如き、整數 a'、b' 存在するにより $a = d.(b'a')$ 卽ち $a = (a'b')d$ 而して $a'b'$ は整數なるが故に a は d の倍數なり。

一般に a_1、a_2、a_3 ……… a_n 等の整數ありて各の a は其次の a の倍數なるときは、最初の a_1 は最後の a_n の倍數なり。

倘汎く a_1、$a_2 \ldots\ldots a_n$ は各 d の倍數にして、q_1、$q_2 \ldots\ldots q_n$ は隨意に定められたる整數なるときは

$$q_1a_1 + q_2a_2 + \ldots \ldots + q_na_n$$

も亦 d の倍數なり。

a、b なる二個の整數の差が m の倍數なるときは、a、b は m を法として相合へり、又は m を法として a は b の剩餘、b は a の剩餘なりと云ふ。此事實を書き表はさんが爲にガウスは次の記法を用ゐたり。

$$a \equiv b \quad . \quad (\mathrm{mod.}\ m)$$

mod. m (*modulo m*) とはなほ「m を法として」と云ふが如し。斯の如き式を相合式と云ふ。

a、b か m を法として相合へる數なるときは $a-b=qm$ 隨て

$$a=b+qm, \qquad b=a+(-q)m$$

なり。但こゝに q と書けるは正又は負の整數なり。此場合に a を b の剩餘、

b を a の剰餘(勿論 m を法として)なりと云ふは、普通の除法に於ける剰餘といふ語の意義を擴張せるなり。實にも a を m にて除して剰餘 r を得たりとせば a と r との差は m の倍數なり、卽ちこゝに謂ふ所の意義に於て r は m を法として a の剰餘なり。

a が與へられたる整數なるときは

$$a + mt$$

なる數は、t が如何なる整數なりとも、必ず m を法としての a の剰餘なり。a を m にて除して得べき剰餘(除法の剰餘)は卽ち $a + mt$ の如き數の中にて最小なる正の整數に外ならず。故に之を m を法としての a の最小の正の剰餘と云ふ。r が m を法としての a の最小の剰餘なるときは

$$r = a + mt_0 \qquad 0 \leqq r < m$$

にして

$$r' = r - m = a + (m - 1)\, t_0$$

は其絶對値 m よりも小なる負數なり。さて r、r' の中少なくとも一方は絶對値に於て m の半を超えず、唯、m が偶數なる場合に於て $r+r'=0$ なることあり得べし。

$$\rho \equiv a \pmod{m} \qquad 2|\rho| \leqq m$$

なる二個の條件に適する數 ρ を m を法としての a の絶對的最小剩餘と云ふ。例へば m を 12 となすときは

$$32 \equiv 8 \equiv -4 \pmod{12}$$

にして 8 は 32 の最小の正剩餘、-4 は絶對的最小の剩餘なり。又

$$-42 \equiv -6 \equiv 6 \pmod{12}$$

にして 6 は -42 の最小の正剩餘、又 6 も -6 も共に -42 の絶對的最小の剩餘なり。

a が m の倍數なりといふ事實を

$$a \equiv 0 \pmod{m}$$

といふ相合式にて書き表はすことを得べし。

相合式は等式に類似せる性質を有し、加法減法、乘法に關しては恰も等式の如くに取扱ふことを得べし。

一、$a \equiv a',\ b \equiv b' \pmod{m}$ ならば $a+b \equiv a'+b' \pmod{m}$ なり。

證、$a-a',\ b-b'$ は共に m の倍數なりと云ふが故に $(a+b)-(a'+b')$ 卽ち $(a-a')+(b-b')$ も亦 m の倍數なり。

同一の數を法とせる二個の相合式を邊々相加へ又は減じて、仍同一の數を法とせる一の相合式を得。　乘法につきても亦然り、卽ち

二、$a \equiv a',\ b \equiv b' \pmod{m}$ ならば $ab \equiv a'b' \pmod{m}$ なり。

證、$a-a'$ は m の倍數なりと云ふが故に $(a-a')b$ 卽ち $ab-a'b$ も亦 m の倍數なり、卽ち

$$ab \equiv a'b \pmod{m}$$

又 $b-b'$ は m の倍數なりと云ふが故に

$$a'b \equiv a'b' \qquad (mod.\ m)$$

よりて(一)によりて

$$ab \equiv a'b' \qquad (mod.\ m)$$

一及二の前提を成せる相合式の數二個より多くとも、同樣の定理は必ず成立すべし、一般に

$$a \equiv a',\ \ b \equiv b',\ \ c \equiv c', \ldots\ldots (mod.\ m)$$

なるときは

$$\Sigma(ka^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots\ldots) \equiv \Sigma(ka'^{\alpha}b'^{\beta}c'^{\gamma}\ldots\ldots) \qquad (mod.\ m)$$

こゝに k は任意の整數にして Σ は其次に書ける如き積若干の和を表はせるものなり。此事實は一及二の直接の結論なり。

斯の如く加法、減法及乘法に關して相合式は等式と同樣の性質を有せりと雖、除法に關しては必しも然らず。例へば

$$2.5 \equiv 2.1 \qquad (mod.\ 8)$$

より兩節を2にて除して

$$5 \equiv 1 \pmod{8}$$

となすことを得ず。

(二)

十進法に於ける二三特殊の整數の倍數を鑑識する方法は汎く知られたり。

一、2及5の倍數、10を超えざる2の倍數は0, 2, 4, 6, 8にして10も亦2の倍數なり。今10を t と書くときは、凡て正の整數は

$$A = (a_m \ldots\ldots a_2 a_1 a_0) = a_m t^m + \ldots\ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

と書くことを得、a_0、a_1、a_2 …… a_m は十より小なる正の整數又は(a_m の外は)0なり。a_0 は A の一位の「數字」なり。さて $t \equiv 0 \pmod{2}$ なるにより

$$A \equiv a_0 \pmod{2}$$

よりて a_0 が0、2、4、6、8の中の一つならば

$$A \equiv 0 \pmod{2}$$

卽ち A は2の倍數(偶數)にして、然らざるとき卽ち a_0 が1、3、5、7、9の中

の一つなるときは、Aは2にて整除し得べからざる数(奇数)なり、此場合に於ては

$$A \equiv 1 \pmod{2}$$

又10は5の倍数なるが故に

$$A \equiv a_0 \pmod{5}$$

にして十以下の数にて5の倍数なるは0又は5に限れるが故にAの一の位の数字が0又は5なる場合に限りAは5の倍数なり。

二、4及25の倍数、10は2の倍数なるが故に100は4の倍数なり。100を紀数法の基数となすときはAの一の位の係数は$(a_1 a_0) = 10a_1 + a_0$にして

$$A \equiv (a_1 a_0) \pmod{4}$$

故にAが4の倍数なるべき完全なる條件は$(a_1 a_0)$即ち十進法に於けるAの末二位の数字を其儘にとりて作れる数の4の倍数なるべきことなり。例へば

$$78657 \equiv 57 \pmod{4}$$

にして57は4の倍數にあらず、$57 \equiv 1 \pmod{4}$ よりて

$$78657 \equiv 1 \pmod{4}$$

78657を4にて除すれば最小の正剩餘として1を得べし。

25を法とせる場合に於ても

$$A \equiv (a_1 a_0) \pmod{25}$$

なる相合式成立すべく、是によりて容易に25の倍數を鑑定することを得べし。

三、9の倍數、十進法にて表はされたる正數を9にて除して得べき最小の正剩餘は次の如くにして容易に求め得らるべし。

先づ

$$t \equiv 1 \pmod{t-1}$$

なることは明白なり。相合式の乘法によりて之より

$$t^n \equiv 1 \pmod{t-1}$$

を得。

今

$$A=(a_m\ldots\ldots a_2a_1a_0)=a_mt^m+\ldots+a_2t^2+a_1t+a_0$$

となすとき

$$S_1=a_0+a_1+\ldots\ldots+a_{m-1}+a_m$$

と置かば

$$a_0t^m\equiv a_0,\ a_1t^{m-1}\equiv a_1,\ldots\ldots a_m\equiv a_m\quad(\text{mod.}\ t-1)$$

より

$$A\equiv S_1\quad\text{mod.}\ (t-1)$$

を得。是故に A を $t-1$ にて除して得らるべき最小の正剰餘は、A の凡ての位の數字の和 S_1 を $t-1$ にて除して得らるべき最小の正剰餘に等し。S_1 若し $t-1$ より小ならば S_1 は卽ち此剰餘にして S_1 若し $t-1$ に等しからば A は $t-1$ の倍數なり。S_1 若し $t-1$ より大ならば更に S_1 のすべての位の係數の和 S_2 を作りて此の鑑定法を適用すべし。

例。十進法に於て

$$A \equiv 1234567$$

なる數の與へられたるときは

$$A \equiv 1+2+3+4+5+6+7=28 \equiv 10 \equiv 1 \quad (mod.\ 9)$$

にして實際

$$1234567=(9 \times 137174)+1$$

なり。

3は9の約數なるが故に十進法に於ては

$$A \equiv S_1 \quad (mod.\ 3)$$

之よりして3の倍數の鑑定法を得。

一般にtを1より大なる整數とするとき、tを基數とせる紀數法にて表されたる數の$t-1$の倍數なるや否やを鑑識するにも同樣の方法によることを得。」

四、11の倍數、又は一般にtを基數とせる命數法に於ける$t+1$の倍數。

先づ

$$t \equiv -1 \pmod{t+1}$$

といへる明白なる相合式より一般に

$$t^n \equiv (-1)^n \pmod{t+1}$$

を得、$(-1)^n$とはnが偶數なるとき1、nが奇數なるとき-1といふに同じ。

$$A=(a_m\ldots\ldots a_2 a_1 a_0)=a_m t^m+\ldots\ldots+a_1 t+a_0$$

に於て

$$D_1 = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots\ldots$$

と置くときは

$$A \equiv D_1 \pmod{t+1}$$

故に十進法に於ける11の倍數を鑑定するには次の法則によるべし。

先づAの最終の位の數字より始めて隔一の位の數字の和を作り、之より其の他の位の數字の和を引きて得たる數をD_1と名づくれば、Aを11にて除して得

べき最小の正剩餘は D_1 を 11 にて除して得べき最小の正剩餘に等し。D_1 若し 0 ならば A は 11 の倍數なり、D_1 若し絶對的に t より大ならずして 0 にあらずは D_1 又は D_1 若し負ならば $11 + D_1$ は即ち求むる所の最小の正剩餘なり。D_1 が絶對的に 10 よりも大なる場合に於ては D_1 につきて同様なる（D_1 が負數なる場合には相當の變更をなして）鑑定法を反復すべし。

例へば　$1234567 \equiv 7-6+5-4+3-2+1 \equiv 4 \pmod{11}$

$1234567 = (11 \times 112233) + 4$

又　$1929090 \equiv -9-9+2-9+1 \equiv -24 \pmod{11}$

さて　$-24 \equiv -(4-2) \equiv -2$　（ 〃 ）

よりて　$1929090 \equiv -2 \equiv 9 \pmod{11}$

實際　$1929090 = (11 \times 175371) + 9$

此章に於て向後用ふべき文字は、特に其然らざるを明言せざる限り、常に正數を表せるものなりとす。

（二）

a、b、c……等の數のいづれもの倍數なる數を其公倍數と云ふ。0は凡ての數の倍數と見做し得べきものなれども、姑く之を度外に置かんに、a、b、c……の公倍數の必ず而も限なく存在すべきことは明白なり。現にa、b、c……の積又は其倍數は皆a、b、c……の公倍數なり。さてa、b、c……の公倍數はa、b、c……のいづれよりも小なることを得ざるにより、此等限りなく存在する公倍數の中に最小なるものなかるべからず。之をa、b、c……の**最小公倍數**と云ふ。凡ての公倍數は最小公倍數の倍數なり。其故如何にといふに、今a、b、c……の最小公倍數をmと名づけ、μを或一個の公倍數となすとき、若しμにしてmの倍數ならずば、mを以てμを除し、剰餘としてmより小にして0にはあらざる數m'を得べし、卽ち

$$\mu = q.m + m'$$

さてμ、m共にa、b、c……のいづれにても割り切るゝが故にm'も亦然らざるを得ず、而もこはmがa、b、c……の最小公倍數なるべしとの約束に牴觸せるにあらずや。是によりて次の定理を得。

一、　μ若しa、b、c……のいづれにても割り切れなばμは亦a、b、c……の最小公倍數にても割り切れざるを得ず。

a、b、c……のいづれをも割り切る數を其公約數と云ふ。1は必ずa、b、c……の公約數なり。a、b、c……が1を外にして公約數を有せざるときはa、b、c……を公約數なき一組の數と云ふ。公約數なしとは絕て公約數なきにあらず、當然にして極端なる公約數1を外にしてはこれなしと言ふなり。公約數なき二つの數を相素なる數と云ふ。

a、b、c……の公約數はa、b、c……のいづれよりも大なることを得ざるにより其數に限あり。是故に其中一個最大なる者なかるべからず。之をa、b、

c ……の最大公約數と云ふ。 a、b、c ……の最大公約數を d と名づけ

$$a = a'd,\quad b = b'd,\quad c = c'd \ldots\ldots$$

となすときは a'、b'、c' ……には1を外にして公約數あることを得ず。如何にとならば若し a'、b'、c' ……に1より大なる公約數あらば其一を g と名づくべし。しかするときは gd は a、b、c ……の公約數にして且 d よりも大なり、而もこれ d が a、b、c ……の最大公約數なるべしとの約束に反せるに非ずや。

a、b、c ……の公約數は凡て其最大公約數 d の約數なり。其故如何にといふに、今 δ を以て公約數の一となさんに a、b、c ……は各 d にても亦 δ にても割り切るゝが故に前に證明せる定理によりて a、b、c ……は各 d と δ との最小公倍數にても亦割り切れざるを得ず。さて d にして若し δ の倍數ならずば d と δ との最小公倍數は d よりも大なり。d の δ にて割り切るゝこと定に已むを得ざる所也。是によりて次の定理を得。

二、a、b、c ……の公約數は其最大公約數の約數なり。 最大公約數は凡ての

公約數の最小公倍數なり。

a、b なる二個の數與へられたるとき、其最小公倍數又は最大公約數を定むるは、a、b の順序に關係なき一の算法なり。卽ち此算法は交換の法則に從へり。又 a、b、c なる三個の數の與へられたるとき其最小公倍數は a、b、c の順序に關係なき定まりたる數なり。

今 a、b の最小公倍數を m と名づけんに、定理一によりて a、b、c の公倍數は必ず m、c の公倍數にして、又 m、c の公倍數は必ず a、b、c の公倍數なり。是故に a、b、c の最小公倍數は亦 a、b の最小公倍數 m と c との最小公倍數に等し。同一の理由によりて a、b、c の最小公倍數は又 a と b、c の最小公倍數との最小公倍數なり。最小公倍數を定むる算法は組み合せの法則に從へり。

最大公約數につきても亦同じ。

是故に多くの數の最小公倍數又は最大公約數を求むるに當て、第二章(四)の方法を適用することを得、隨て此算法は畢竟二個の數の最小公倍數又は最大

公約数を求むることを反復するに歸着す。

(四)

a、b なる二數の最小公倍數を m と名づけ

$$m = ka = hb$$

となすときは、a、b の公倍數の一なる ab といふ數は、m の倍數即ち ab は ka の倍數なるが故に b は k の倍數、又同様にして h は a の倍數にして、而も

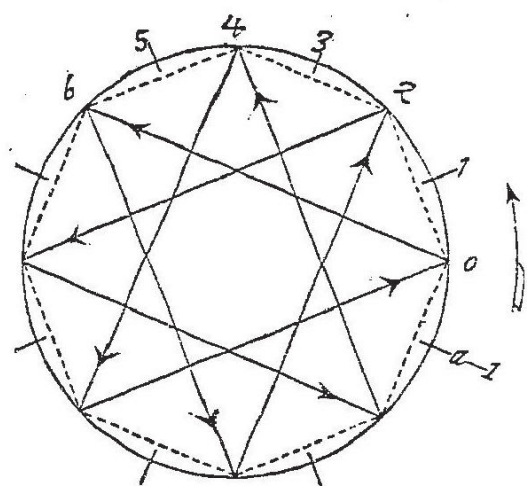
$$a = hg,\ b = kg,\quad ab = mg$$

g は a、b の公約數なり。然れども g は亦 a、b の最大公約數なり。げにも h、k には公約數なし、若し假に $h = h'd,\ k = k'd\ (d > 1)$ なりとせば

$$m' = k'a = h'b$$

は a、b の公倍數にして而も m よりも小なりとの矛盾の結論に陷るべければなり。是故に次の定理を得。

一、二つの數の積は其最大公約數と最小公倍數との積に等し。

ポアンソーはこの論法に極めて趣味ある幾何學的の解釋を與へたり。一の圓周を a 個に等分し、其分點に順次 $0, 1, 2 \cdots\cdots a-1$ の番號を附す。さて 0 より始め b 個毎の分點 $0, b, 2b \cdots\cdots$ を直線にて連結し行くときは、分點の數は a 個に過ぎざるが故に竟には圓周を幾度か廻りたる後、既に一たび通過せる分點に到着せざるを得ず。而も始めて再度逢着する點は必ず0なり。何となれば再度例へば b 點に來り得べきためには其前必ず0點を經來らざるを得ざればなり。(圖に於ては a を 16 b を 6 となせり。)

今分點を通過すること h 回、其間圓周を廻ること k 回にして 0 に復歸せりとせば、

$$hb = ka$$

なり、hb は $b, 2b \cdots\cdots$ 等の中始めて a の倍數となれるものにして卽ち a、b の最小公倍數なり。同時に又 h と k とに公約數なきを知るべし。さて

此手續きによりて圓內に一種の正 h 角形を畫き出せり、是故に a は h の倍數なることを知る、$a = hg$ 隨て前の如くにして a、b の最大公約數は g なることを知るべし。

此幾何學的の考究より學び得べき、尚一の重要なる事實あり。上に述べたる作圖の中に於て通過せる分點の中(矢の方向に圓周を廻るものとして)0 に最も近きは如何なる點ぞや。若し上の作圖に於て逢着せる分點を更に 0 より圓周上の分布の順序に從ひて直線にて連結し行くときは(圖にて點線にて示せる如く)即ち普通の正 h 角形を得べきが故に、此等の分點の中 0 に最も近き者は $a:h$ 即ち g なる番號を帶べるものに外ならず。然るに此點は最初の作圖に於て、0 より b 個每の分點に移り行きつゝ到着することを得たる點なるが故に、

$$g = k'b - h'a$$

の如き關係成立するを知るべし。但此處 h' は h よりも小、又 k' は k よりも

小なること勿論なり。幾何學的の假裝を剝奪するときは、此事實は整數論の重要なる定理となる。曰く、a、b の最大公約數を g とし、$a = hg$, $b = kg$ となすときは、h' は h よりも、又 k' は k よりも小にして、而も $g = h'b - k'a$ なるが如き整數 h'、k' は必ず、而も唯一對に限り、存在す。然れども又上の研究に於て、a と b との位置を轉倒するも、g は依然として變ずることなきが故に、$h'' < k$, $k'' < h$ にして而も $g = h''a - k''b$ なるが如き整數 h''、k'' も必ず、而も唯一對に限り、存在すべきを知るべし。

此等の事實を總括して次の定理を得。

二、a、b の最大公約數を g とし $a = hg$, $b = kg$ と置かば

$$ax + by = g$$

なる方程式に適合すべき正又は負の整數 x、y は必ず存在す。就中 x が k より小なる正數にして y が絶對値に於て h より小なる負數なる者 ($x = h''$, $y = -k''$) 及 x が絶對値に於て h より小なる負數にして y が k より小な

る正數なる者 $(x = -k', y = h')$ 各唯一對に限り存在す。

例へば $a = 16, b = 6$ とせば $g = 2, h = 8, k = 3$ にして

$$16x + 6y = 2$$

の解答の中上文特筆せる二對は $x = 2, y = -5$ 及 $x = -1, y = 3$ なり。

吾輩が幾何學的に證明したる事實を直接に論證せんことも亦容易なり。今

$$b, 2b, \ldots\ldots (h-1)b$$

を a にて除して得べき剩餘（最小正剩餘、以下同じ）を考へんに此等の剩餘は $mb - qa = r$ の如き數なるが故に何れも a、b の公約數なる g の倍數なること明白なり。而も此等の剩餘の中相等しき者決してあることなし。何となれば今假に n n' は $1, 2, \ldots\ldots h-1$ の中より採りたる二個の相異なる數にして、而も $nb - qa = r$, $n'b - q'a = r$ なりとせば、例へば $n > n'$ となすとき、$(n-n')b = (q-q')a$ を得、b に h よりも小なる數 $n-n'$ を乘じて得たる積が既に a の倍數なりとの許すべからざる結論を生ずべければなり。吾輩の作れる $h-1$ 個

の剰餘は皆相異にして、而も盡く a 即ち mg より小なりと言ふ上は、此等の剰餘は其全體に於て $g, 2g, \ldots\ldots(m-1)g$ なる數と同一ならざるを得ず、即ち其中一つ而も唯一つが g に等しきなり。さて例へば

$$h'b - k'a = g$$

なりとせば $h' < m$ 隨て $k' < n$ にして定理一は再び證明せられたり。a、b を轉倒するも亦同様の結果に達し得べきこと勿論なり。或は又 $-k'$ を n を以て除して得べき最小正剰餘を k'' と名づけ、即ち $-k' = -n + k''$, $n > k'' > 0$ となすときは

$$(h' - m)b + (n - k')a = g$$

即ち

$$k''a - h''b = g\,.$$

にして、$h'' = m - h'$ は m より小なる正數なり。

上の定理を特に $g = 1$ の場合につきて繰り返すときは次の事實を得。

三、a、b が相素なる數なるときは

$$ax + by = 1$$

なる如き正又は負の整數 x、y は必ず存在す。而して定理一に述べたる如き二對の特殊なる解答の此場合に於ても亦成立すべきこと勿論なり。

(五)

前節の定理一は特別の場合として次の事實を包括す。

一、a、b が相素なるときは、a、b の最小公倍數は其積 ab に等し。

此事實より推して更に整數論に於て最重要なる一個の定理を得。曰く

二、a、b は相素なる數にして而も ac が b の倍數なるときは、c は必ず b の倍數なり。

證。a、b は相素なる數なるが故に、其最小公倍數は ab なり。ac は b の倍數なるが故に、こは a、b の公倍數、隨て其最小公倍數 ab の倍數なり。即ち $ac = ab.q$ なる如き整數 q は存在す、隨て $c = b.q$ 即ち c は b の倍數なり。

前節に於て a、b の最大公約數を g となすとき

$$ax + by = g \qquad (1)$$

なる方程式は必ず正又は負の整數 x、y によりて解き得らるべきことを證明し、且 x、y の大さに或る制限を設くるとき、斯の如き解答の唯一組に限り存在すべきを說けり。今定理二を用ゐて上の一次不定方程式（一次のヂオファント方程式）の最完全なる解答を求めんとす。

方程式(1)の解答許多あり得べき中の一つを x_0 y_0 となすときは

$$ax_0 + by_0 = g$$

なり。よりて一般に凡ての解答は

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

なる條件に適合すべきを知る。さて例によりて $a = hg$, $b = kg$ となすときは h、k は相素にして

$$h(x - x_0) = -k(y - y_0).$$

さて $h(x - x_0)$ は k の倍數にして而も h は k と相素なりといふが故に、二に

よりて $x-x_0$ は k の倍数なり、今

$$x-x_0=kt,\quad x=x_0+kt$$

と置かば

$$y-y_0=-ht,\quad y=y_0-ht$$

を得。(1)の解答を求めんと欲せば之を

$$\begin{cases} x=x_0+kt \\ y=y_0-ht \end{cases}\qquad(2)$$

の如き数の中より捜り出すべきなり。

然るに t を如何なる整数となすとも此の如き値はよく(1)に適合すべきが故に(2)は凡て(1)の解答なり。

今一般に

$$ax+by=c\qquad(3)$$

なるヂオフアンント方程式を提供するに、此方程式は c が a、b の最大公約数 g

の倍數なるにあらずば整數の解答を有することを得ず。c が g の倍數にして、例へば $c=gc'$ なるとき、x_0, y_0 を(1)の解答とせば

$$x=c'x_0,\quad y=c'y_0$$

は(3)の一個の解答にして、其一般の解答は

$$\begin{cases} x = c'x_0 + kt \\ y = c'y_0 - ht \end{cases} \qquad (4)$$

なり。t に相當の値を與へて x y の中一方が k 又は h より小なる正數なる如き唯一組の解答を得。例へば x を k より小なる正の整數となさんと欲せば、$c'x_0$ を k にて除して最小の正剩餘 $\bar{x}$ を求むべし。

今

$$c'x_0 = k\bar{t} + \bar{x},\quad k > \bar{x} > 0$$

なりとせば、t を $\bar{t}$ となして得たる y の値を $\bar{y}$ となし、こゝに一組の解答($\bar{x}$、$\bar{y}$)を得。但此場合に於て $\bar{x}$ を k より小なる正數となすことを得たりと雖前の如く同時に $\bar{y}$ を絶對的に h よりも小となすことを得たりと誤解すること

勿れ。

二個以上の未知數を含めるヂオフアント方程式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots\cdots = c \qquad (5)$$

も亦 c が a_1、a_2、a_3……の最大公約數 g の倍數なるときに限り整數の解答を有す。

未知數の數三個なる場合につきて言はんに、先づ a_1、a_2 の最大公約數を d と名づくれば

$$a_1y_1 + a_2y_2 = d$$

は整數の解答を有す。さて d と a_3 との最大公約數は卽ち a_1、a_2、a_3 の最大公約數 g にして、c は g の倍數なりとせるが故に

$$dx + a_3x_3 = c$$

は整數の解答を有す。而して

$$x_1 = y_1x, \quad x_2 = y_2x, \quad x_3$$

は即ち $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ の解答なり。

未知數の數三個以上なるときは唯同様の手續きを幾回も反復すべきのみ。

特に

a_1、a_2、a_3 ……… に公約數なきときは

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots\cdots = 1 \qquad (5')$$

なるが如き正又は負の整數 x_1, x_2, x_3 ……… は必ず存在す。

(5) 又は (5′) の如きヂオファント方程式の一般の解答はオイレルの方法により て求め得べし。今特別なる例題につきて此方法を説明せんとす。

(a)　$357x + 238y + 204z = 17$

の解答を求めんとするに、先づ最小の係數 204 を以て其他の係數を除し

$$357 = 2 \times 204 - 51, \qquad 238 = 1 \times 204 + 34$$

を得。よりて

(b)　$2x + y + z = z'$

と置き (a) を次の形となす、

(a') $-51x + 34y + 204z' = 17$

(a) の解答を求めんと欲せば、先づ (a') の解答 x、y、z' を求め、さて (b) によりて z を定むれば可なり。

(a') を解かんが爲に 34 を以て其他の係數を除し、

$$-51 = -1 \times 34 - 17, \quad 204 = 6 \times 34$$

を得。よりて

(c) $-x + y + 6z' = y'$

と置き、(a') を更に變形して

(a'') $-17x + 34y' = 17$

を得。17 を以て 34 を除し $34 = 2 \times 17$ を得、

(d) $-x + 2y' = x'$

と置き (a'') を改めて

(a''') $17x' = 17$

と書く。

最一般なる場合に於ても、與へられたる方程式の左邊を順次變形して遂に (a''') の如く只一個の未知數のみを含める形となすことを得ること明白なり。何となれば (a)、(a')、(a'')……等の左邊は其生成上漸次小なる整の係數を得べく、又上に述べたる變形の方法は (a)、(a')……等が少なくとも二個の未知數を含める間は必ず繼續することを得べければなり。

最後に得たる唯一個の未知數の係數は卽ち與へられたる方程式の左邊の係數の最大公約數なること、容易に悟り得べき所なり。上の例につきて 357, 238, 204 の最大公約數17に達する演算を再び記さば次の如し。

357	−51	17	$\underline{17}$
238	34	34	0
204	204	0	0

さて (a''') は $z'=1$ なる解答を有す、よりて (d) より

$$x = 2y' - 1$$

随て (c) より

$$-2y'+1+y+6z' = y' \quad 即ち \quad y = 3y'-6z'-1$$

を得、更に (b) より

$$2(2y'-1)+(3y'-6z'-1)+z = z' \quad 即ち \quad z = -7y'+7z'+3$$

を得。此等の結果を集めて

$$x = 2y'-1, \quad y = 3y'-6z'-1, \quad z = -7y'+7z'+3$$

を得。y'、z' を如何なる整數となすとも此式より生じ來るべき x、y、z は必ず (a) の解答にして、又 (a) の解答は盡く此式に網羅せらるゝこと明白なり。

例へば $y'=0,\ z'=0$ となすときは

$$x=-1, \quad y=-1, \quad z=3$$

又 $y'=1,\ z'=0$ となすときは

にして、果して

$$x = 1,\quad y = 2,\quad z = -4$$

$$-1.357 - 1.238 + 3.204 = 17$$

$$1.357 + 2.238 - 4.204 = 17$$

なり。

（六）

如何なる整數にても割り切るゝ數は0に限り、唯一個の約數のみを有する整數は1に止まれり。

此二個の特異なる數は姑らく之を度外に置くとき、凡て整數は少なくとも二個の約數を有す、其數自身及1卽ち是なり。凡ての數の當然有すべき此二個の約數を假の約數と云ひ、此他の約數を眞の約數と云ふ。

d 若し a の約數なるときは $a = d.d'$ なるべき整數 d' は必ず存在し、d' も亦 a の約數なり、d、d' は a の約數として相塡補す。1 と a とは a の塡補約數

なり。凡て整數は必ず少くとも一對の塡補約數を有せり。

塡補約數僅に一對を有するに止まる數、卽ち眞の約數を有せざる數を素數と云ひ、然らざるを合成數と云ふ。2、3は素數にして6は合成數なり。

一、整數aと素數pとあるとき、a若しpの倍數ならずばaとpとは相素なり。

其故如何にといふにa、pの公約數は必ずpの約數の中につきて之を索めざるを得ずして、pの約數はp及1に限ぎれるが故に、a、pの最大公約數はpならずば1ならざるを得ざるなり。

a若し素數pの倍數ならずばamのpの倍數なるはmがpの倍數なるときに限れり。一般に

二、a、b、c……の積素數pの倍數なるときは、因子の中少なくとも一はpの倍數ならざるを得ず。

素數ならざる數を合成數と名づけたる所以は其必ず素數因子の積として表は

され得べきによるなり。今之に關する事實を闡明せんが爲に先次の簡短なる定理を證明せんとす。

合成數 a は少くとも一個の素數を眞の約數となす。

a の眞の約數は皆 a より小なるが故に其數に限あり、是故に其中最小なる者必ずあり。a の眞の約數の中最小なるものを p と名づく、今 p の素數なるべきを論じ、以て當面の定理を證せんとす。p 若し素數ならずば p は(1にも又0にもあらざるにより)合成數にして少くとも一個の眞の約數を有す。p の眞の約數の一を d と名づくれば、d は p より小にして而も又 a の眞の約數なり。卽ち a は p よりも小なる眞の約數を有せざるを得ず。而も是 p に關する約束に牴觸する事實ならずや。

吾輩は更に進みて

三、凡て合成數は必ず素數因子の積として表はし得べきことを證せんとす。

a の素數因子の一を p と名づけ $a = pa'$ と置く。a' 若し素數ならば吾輩の定

理既に成立せり。a' 若し合成數ならば a' の素數因子の一を p' と名づけ $a'=p'a''$ と置くときは $a=pp'a''$ を得。次第に斯の如く考へ行くに a、a'、a'' ……… は順次減少するが故に、斯の如き手續きは限なく繼續せらるゝことを得ず。而も其究極する所は卽ち吾輩の定理の成立する時にして畢竟

$$a=pp'p'' \cdots$$

を得。此處 p、p'、p'' ………と稱するは何れも素數なれども、其記號異なるが爲に此等の素數も亦盡く異なりと速斷すべからざること論を俟たず。若し p、p'、p'' ……… 等の中より相等しきものを盡く集めて冪となすときは

$$a=p^{\pi}q^{\chi}r^{\rho} \cdots$$

の如き形を得、此處にては p、q r ……… は相異なる素數を表はせり。吾輩は凡て合成數の必ず素數冪に分解せられ得べきことを證明せり。然れども a の與へられたるとき此の如き分解は唯一通りに限らるべきや否やは未知の問題なり。今や進で此重大なる問題を解決せんとす。

四、凡て合成數の素數因子分解は唯一なり。

假に a を素數因子に分解して二樣の結果を得たりとし、

$$a = pp'p'' \cdots\cdots = qq'q'' \cdots\cdots$$

と置かんに、先 a 即ち $pp'p'' \cdots\cdots$ は素數 q にて割り切るゝにより $p\ p'\ p''$ $\cdots\cdots$ の中少くとも一は q にて割り切れざるを得ず（定理二）例へば p は q の倍數なりとせんに p も亦素數なるが故に p は q に等しからざるを得ず。是故に上の式より

$$p'p'' \cdots\cdots = q'q'' \cdots\cdots$$

を得。之に同樣の論法を適用して例へば $p' = q'$ を得、次第に斯の如くにして結局上の定理の證明を完くすべし。

凡て合成數が素數の積として表はされ得べきのみならず、此分解が唯一樣に限れりといふは、整數論に於ける最重要なる事實にして、又此事實の證明が（五）の定理二を根據とせることは深長なる意義を包藏す。

整數の中より素數を撰み出す方法は既に古希臘の數學者の知れる所にして、所謂エラトステネスの篩是なり。

2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

整數を自然の順序に書き列べ先づ1を去るとき、最初に殘れる數2は素數なり。何とならば2に眞の約數あらば、そは2より小なる整數にして、2より小なる整數は1を外にして之なければなり。さて2より二つ目毎の數4、6、8、10……に符標を附すべし。2の次に符標を帶ばざる數は3にして、3は素數なり、何とならば3に眞の約數あらば、そは2ならざるを得ず、然れども3に符標なきは其2の倍數に非ざるを示せばなり。さて3より三つ目毎の數に符標を附し、殘れる最初の數5の素數なるを知り、5より五つ目毎の數に符標を附し、斯の如く進みて遂にpなる素數に達したりとせよ。さて此時p^2以下の數にして未だ符標を帶ばざるものは盡く素數なり。例へばaを符標なき數

の一となさんには、其塡補眞約數の一對を a、a' となすときは、a は p^2 より小なるが故に a、a' の中少とも一方は p より小なり、隨て a は p より小なる素數(a、a' 又は其約數)にて割り切れざるを得ず、而も a に符標なきは其然らざるを示すに非ずや。

素數の數に限なきことも亦古希臘人の知れる所にしてユークリッドの證明は甚だ有名なり。

假に素數の數に限ありとせよ、凡ての素數の連乘積に1を加へ

$$2 . 3 . 5 \ldots\ldots\ldots p + 1$$

なる數を作りて考ふるに、此數若し素數ならば、是2、3……p 以外仍ほ素數あるなり。又若し此數合成數なりとするも其素數因子は2、3、5……p の中にはなし、何となれば上に掲げたる數を2、3……p の何れにて割るも剩餘1を得べければなり。素數の數に限ありとの主張は保持すべからず。

(七)

整數 a を素數冪に分解して

$$a = p^{\pi} q^{\kappa} r^{\rho} \cdots$$

なる結果を得たりとするときは、a の約數は凡て

$$a = p^{\pi'} q^{\kappa'} r^{\rho'} \cdots$$

の如き形をなし、π' は 0 より π まで、κ' は 0 より κ まで、又 ρ' は 0 より ρ までの中の整數なり。此故に a の約數の表を作らんとせば、a の式に於て π'、κ'、ρ' ……… に順次此等の整數の値をあらゆる組み合せに於て配與すれば則ち可なり。

今二個以上の數 a、a' ……… につきて說かんが爲に、此等の數の中少くとも何れか一つに因子として關係せる素數を盡く採り、之を p、q、r ……… と名づけ

$$a = p^{\pi} q^{\kappa} r^{\rho} \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a' = p^{\pi'} q^{\kappa'} r^{\rho'} \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a'' = p^{\pi''} q^{\kappa''} r^{\rho''} \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

と置く。但し π、π'、π'' ……… κ、κ'、κ'' ……… 等は一般に正の整數なれども其中 0

なるものも亦あり得べしとなさゞるを得ず、或數の分解を示せる式の中、或素數の指數の0なるは、卽ち其素數が實は此數の約數に非ざることを示せり。又dをa、a'、a''………の公約數とし

$$d = p^{P} q^{Q} r^{R} \cdots \cdots \cdots$$

と置かば、Pはπ、π'、π''………の何れよりも大ならず、Qはκ、κ'、κ''………の中何れよりも大ならず。是故にa、a'、a''………の最大公約數gを得んと欲せば

$$g = p^{m} q^{m'} r^{m''} \cdots \cdots \cdots$$

に於てmをばπ、π'、π''………の何れよりも大ならざる範圍內に於て成るべく大に、卽ちmをπ、π'、π''………の中最小の數に等しくなし、又m'をκ、κ'、κ''………の中最小の數に、m''をρ、ρ'、ρ''………の中最小の數に等しくせば可なり。

又a、a'、a''………の公倍數

$$e = p^{P'} q^{Q'} r^{R'} \cdots$$

にありてはP'はπ、π'、π''………の何れよりも、又Q'はκ、κ'、κ''………の何れよ

りも小ならず。故に a、a'、a'' ……… の最小公倍數

$$l = p^{M} q^{M'} r^{M''} \ldots \ldots$$

を得んと欲せば、M を π、π'、π'' ………の中最大なる者に、又 M' を κ、κ'、κ'' ………の中最大なる者に……… 等しからしむるを要す。

例一、$60 = 2^2.3.5$ の凡ての約數を作らんと欲せば

$$d = 2^{\pi'}.3^{\kappa'}.5^{\rho'}$$

に於て π' を 0、1、2、κ' を 0、1、ρ' を 0、1 の中より、あらゆる組み合はせに撰み出さゞるべからず、其結果は次の如し。

π'	κ'	ρ'	d
0	0	0	1
1	0	0	2
2	0	0	4
0	1	0	3
1	1	0	6
2	1	0	12
0	1	1	15
1	1	1	30
2	1	1	60

例二、$60 = 2^2 . 3 . 5,\quad 72 = 2^3 . 3^2$
の最大公約數及最小公倍數を求めて次の結果を得。

$$\left.\begin{array}{lll} p = 2, & q = 3, & r = 5 \\ \pi = 2, & \kappa = 1, & \rho = 1 \\ \pi' = 3, & \kappa' = 2, & \rho' = 0 \\ m = 2, & m' = 1, & m'' = 0 \\ M = 3, & M' = 2, & M'' = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g = 2^2 . 3^1 . 5^0 = 12, \\ l = 2^3 . 3^2 . 5 = 360. \end{array}$$

第五章　分數

分數班の構成、分數班內の相等大小及加法減法、整數と分數班との內容の一致○通分、一般分數の相等大小及加法減法、既約分數○分數班の總括、數の新系統、其特徵、分布の稠密なること及等分の可能○倍加及等分、最小公倍數及最大公約數○分數の比、比例式、分數の乘法、除法

（一）

分數の起源は量を計るにあり。然れども吾輩は姑らく此事實を度外に置き、此處には先づ順序の思想を根據として分數の觀念に到達せんとす。是れ一には汎く知られざる立脚點を紹介するの意に出で、又一には、負數の條に言へるが如く、數學上の觀念に具體的の內容を與ふることの、樣々になされ得べきを例證せんと欲するに由れり。

順序數の冒頭0を添へ、更に又0に先ちて、逆に究なく連亙せる負數を附加して數の範圍を擴張することを得たり。今同一の思想を敷衍して、更に此方向に一步を進めんとす。

先づ順逆兩面に亙りて究る所なき、物の引續きを考へ、此等の物の中任意に或一つを採りて、之を0と名づけ、(此物に0を配合し)之に先後せる凡ての物に順次凡ての正及負の整數を配合すべし。此等の物の各には、直に之に次げる唯一個の物あり、斯の如く相隣接せる二つの物の中間に更に一個づゝ新しき物を挿入せりとし、さて此等新舊兩種の物を一括して考ふるに、是亦順逆の兩方

面に亙りて究る所なき、物の引き續きにして、此等凡てにも亦其順序に從ひて凡ての正及負の整數を配合することを得。若先に0を配合せる物には此度も亦0を配合せりとし、且前後兩回の配合を區別せん爲に、後に配合せる數を包むに括弧を以てするときは、此兩回の配合は次の如き形貌を呈すべし。

	*	
−2	•	(−4)
	*	(−3)
−1	•	(−2)
	*	(−1)
0	•	0
	*	(1)
1	•	(2)
	*	(3)
2	•	(4)
	*	(5)
	•	

同一の物に二樣の命名をなし、一たびは其凡てに命名し、又一たびは其一半に命名して他の一半の命名を闕げり。一半には二樣の命名ありて、一半には唯一樣の命名あり。二樣の名稱の同一の物に屬せるを表はすに次の記法を用ゐるべし。(上の圖式を看よ)

$(-2) = -1, \quad (0) = 0, \quad (2) = 1, \quad (4) = 2, \ldots\ldots$

一般に

$$(2k) = k \qquad (1)$$

不等の符號＜＞は先後を表はすものとなして、例へば

$$(3) > (-4), \quad (7) > 3$$

など書く、一般に

$$(2k+2) > (2k+1) > (2k)$$

或は物の異同にのみ着目して、名稱の新舊を問はずば

$$k+1 > (2k+1) > k \qquad (2)$$

物の順序定まりたる上は第三章(一)のI、IIによりて加法の意義を定むることを得、しかするときは例へば

$$(1) + (1) = (2) = 1$$

$$(7) = (6) + (1) = 3 + (1)$$

一般に

$$(2k+1) = k + (1) \qquad (3)$$

こは直に k に次げる物は $(2k+1)$ なりと言ふに同じ。例へば前の圖式に於て直に 2 に次げるは (5) にして、又直に -2 に次げるは (-3) なり。

$(k)+(k)$ を (k) の二倍と名づくれば、一般に

$$(k) \text{ の二倍は } k \qquad (4)$$

なり。

若し又當初隣接せる二個の物の中間に $n-1$ 個づゝの新しき物を挿入し、前の如く二様の命名をなし、此度の新名稱をば、特に此 n を添へたる記法にて書き表はさば、次の圖式を得。先に (k) と書けるは此記法に從はば $(k)_2$ となすべきものなり。

$(-2)_n$ *
$(-1)_n$ *
$(0)_n$ • 0
$(1)_n$ *
$(2)_n$ *
⋮ *
*
*
$(n)_n$ • 1
$(n+1)_n$ *
⋮ *
*
*
*
$(2n)_n$ • 2
⋮ *
*

前と同様に、一般に

$$(nk)_n = k \qquad (1^*)$$

$$k+1 > (nk+m)_n > k \qquad (2^*)$$

$$(nk+m)_n = k+(m)_n \qquad (3^*)$$

$$(m = 1, 2, \ldots\ldots n-1)$$

又 n 倍といふ語を前の如き意義に用ふれば、

$$(k)_n \text{ の } n \text{ 倍は } k \qquad (4^*)$$

なり。

隣接せる整數の間に $n-1$ 個づゝの新しき數を挿入して數の範圍を擴張し、$(a)_n$ の如き記法を以て此等の數を表して其大小の順序を明にし、又

$$\text{I.}\ (a)_n + (1)_n = (a+1)_n \qquad \text{II.}\ (a)_n + (b+1)_n = (a+b)_n + (1)_n$$

によりて其加法を定む。(第三章(二)を參照せよ)又整數 k は新範圍の一員として(1*)の名稱を得たりとす。(2*)(3*)(4*)は此等の規定の中に含まれたり。

$(a)_n$ の如き記法はことぐし、代ふるに $\frac{a}{n}$ を以てすべし。n は自然數にして a は正又は負の整數(又は0)なり。斯の如き數を分數といひ、n を其分母、a を其分子といふ。分母、分子を分數の兩項となす。

n を1となすは、隣接せる整數の中間に新しき數を挿入することなきの謂なりとなし、整數 k を分母1なる分數と呼びて用語上の便利を享ること大なり。」

同一の分母 n に屬せる分數を總括して假に之を分數班といふ、一の分數班の範圍内に於ける大小の關係及加法減法は次の如し。

一、　$a \gtrless b$　と共に　$\frac{a}{n} \gtrless \frac{b}{n}$

二、　$a \pm b = c$　と共に　$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{c}{n}$

特に　$\frac{0}{n} = 0, \quad \frac{nk}{n} = k, \quad \frac{a}{n} + \frac{-a}{n} = 0$

$$k+1 > \frac{nk+m}{n} = k + \frac{m}{n} > k \qquad (k > m > 0)$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{k}{n}+\frac{k}{n}+\cdots\cdots+\frac{k}{n}=k$$
$$(1)\quad(2)\quad\cdots\cdots\cdots\quad(n)$$

要するに同一の分母nに屬せる分數の大小の關係及加減の算法は、其分子のそれぞれと全く同一に歸す。分數班は其一部として凡ての整數を包括せるが故に、其範圍整數のそれよりも廣大なるの觀ありと雖、實は兩者其內容を同じくして、唯個々の數の名稱に異同あるに過ぎず。

分母nなる分數班の中にありて、$1/n$は整數の範圍內に於ける1と同樣の位置を占めたり。$1/n$を此分數班の單位或は幹分數といふ。

(二)

今$m=qn$と置き、分母mに屬せる分數の中其分子がqの倍數なるもののみを保留して、其他を排斥するときは

$$\cdots\cdots\frac{-2q}{m},\ \frac{-q}{m},\ 0,\ \frac{q}{m},\ \frac{2q}{m},\ \frac{3q}{m},\ \cdots\cdots \qquad (4)$$

を得、此等の數は又順逆兩面に亙りて究りなく連續し、而も其大小の關係及加法は全く分母 n に屬せる凡ての分數のそれと異ならず。先づ隣接せる二つの整數 k、$k+1$ の中間には (A) の數恰も $n-1$ 個の横はれるを見る、

$$\frac{(kn+1)q}{m},\quad \frac{(kn+2)q}{m},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\quad \frac{(kn+n-1)q}{m}$$

是なり。又

$$a \gtrless b \quad \text{と共に} \quad \frac{aq}{m} \gtrless \frac{bq}{m}$$

$$a+b=c \quad \text{と共に} \quad \frac{aq}{m}+\frac{bq}{m}=\frac{cq}{m}$$

(A) の諸數と、分母 n に屬せる分數

$$\cdots\cdots\quad \frac{-2}{n},\quad \frac{-1}{n},\quad 0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n}\quad \cdots\cdots \qquad (B)$$

とは其成立の由來を外にして之を區別する所以の者全く有ることなし。是故に吾輩は (A)、(B) を同一視して一般に

$$\frac{m}{m} = \frac{n}{n}$$

と置き、以て分母 n に屬せる分數を分母 $m = np$ に屬せる分數班の中に包括せしむ。分母 m に屬せる分數班は其一部として m の或約數を分母とせる分數を含蓄す。同一の分數は種々の分母に屬せる分數の中に包括せられ、此等の分數班の一員として種々の形式に表はさるゝことを得。

n、n' の公倍數の一つを m となせば、分母 n に屬する分數及分母 n' に屬する分數は共に盡く分母 m なる分數班の中に含蓄せられたり。今

$$m = np = n'p'$$

と置かば

$$\frac{a}{n} = \frac{ap}{m},\quad \frac{a'}{n'} = \frac{a'p'}{m}$$

$\frac{a}{n}$、$\frac{a'}{n'}$ を分母 m に屬せる分數班の一員として、其大小を比較し又之に加法減法を施こすことを得、卽ち

$$ap \gtreqless a'p' \text{ に伴ひて } \frac{a}{n} \gtreqless \frac{a'}{n'}$$

$$\frac{a}{n} \pm \frac{a'}{n'} = \frac{ap \pm a'p'}{m}$$

然れども之を以て分數の大小及加法減法の定義となさんと欲せば、斯の如くにして定められたる大小の關係及加法減法の結果が公分母 m の選擇に關係なきことを確めざるべからず

相等及大小。$\frac{a}{n}$ $\frac{a'}{n'}$ の相等大小は ap, $a'p'$ の相等大小に随伴す。さて $ap \gtreqless a'p'$ に伴ひて $apnn' \gtreqless a'p'nn'$ (n、n' は共に自然數随て正數なることを記憶すべし) $m = np = n'p'$, $m > 0$ によりて、$an' \gtreqless a'n$ 斯の如く ap $a'p'$ の相等大小は必ず an', $a'n$ の相等大小と相伴ふにより、$\frac{a}{n}$ $\frac{a'}{n'}$ の相等大小を判定するには an', $a'n$ を比較せば則ち足る。さて an', $a'n$ に m の痕跡なきにより $\frac{a}{n}$、$\frac{a'}{n'}$ の相等大小は n、n' の公倍數 m の選擇に關係なし。二つの分數を如何なる分數班に屬せるものとして其大小を比較するとも、其結果は恆に同じ。

上述の説明の中より特に次の法則を採り出すべし。

$$an' \gtreqless a'n \quad と \quad \frac{a}{n} \gtreqless \frac{a'}{n'}$$ とは相伴ふ。

加法及減法。二つの分數 α α' に同一の分母を與へて

$$\alpha = \frac{a}{m}, \qquad \alpha' = \frac{a'}{m}$$

と置き、

$$\alpha + \alpha' = \frac{a + a'}{m}$$

により其和を定むるとき、此和は公分母 m の選擇に關係なきを確めざるべからず。今公分母 m に代ふるに M を以てし、更に

$$\alpha = \frac{A}{M}, \qquad \alpha' = \frac{A'}{M}, \qquad \alpha + \alpha' = \frac{A + A'}{M}$$

と置けば、先づ

$$\frac{a}{m} = \frac{A}{M} \quad より \qquad aM = mA$$

$$\frac{a'}{m} = \frac{A'}{M} \quad \text{より} \quad a'M = mA'$$

を得、之を加へて

$$(a+a')M = m(A+A')$$

隨て

$$\frac{a+a'}{m} = \frac{A+A'}{M}$$

なるを知る。減法の場合も亦同じ。

是によりて分數の大小及加減を含める算式は、此等の分數を之に等しき他の分數を以て置き換へたるが爲に、其成立を妨げらるゝことなきを覺るべし。

分數の加法が組み合はせの法則及交換の法則に遵ふこと明白なり、又整數の加法減法に關して第三章に述べたる事實は語句の更むべきを更めて、汎く之を分數に適用することを得。此處に此等の事實を證明する方法の一例として加法の交換の法則を證せんとす。

α、βが二つの分數なるとき $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ なるを證せんことを要す。α、βを公分母に直して $\alpha=\frac{a}{m}$, $\beta=\frac{b}{m}$ と置けば

$$\alpha+\beta=\frac{a+b}{m},\quad \beta+\alpha=\frac{b+a}{m}$$

を得、整數a、bの加法には交換の法則を適用し得べきが故に $a+b=b+a$

隨て $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

(三)

相等しき分數を總括して之を唯一つの數となし、即ち分數の値に着目して分數の形式の異同を度外に置き、さて凡ての分數を打して一團となし、新に數の一系統を組織するときは、此範圍内に於て、二つの異なる(値の異なる)數の中唯一つが他の一よりも大にして、且大小なる語の意義は、よく自然數の場合に於て第一章(二)にいへるが如き條件に遵へり。又二つの數は必ず一定の和を有し、減法は凡ての場合に可能にして恆に一定の結果を與へ、且加法、減法は

整數の場合と同一の性質を具へたり。

斯の如くにして作り出せる數の系統は、特別の場合として凡ての整數を含蓄せり。而して此新系統が啻に形式の上のみならず、內容に於て、實際整數の系統よりも廣大なる一範圍を成せることは、次の二つの事實の明に示す所なり。

一、分數の分布は各處稠密なり。凡て整數には必ず直に之より大又は小なる他の整數あり。相隣接せる整數の中間に第三の整數あるを許さず。整數に異樣の命名をなせるに過ぎずして、其內容の擴張にはあらざる、彼分數班なるものの範圍內に於ても、亦同樣の事實成立せり。然れども凡ての分數班を合同して作り成せる吾輩の新系統の範圍に於ては則ち然らず。

如何なる分數を考ふとも直に之より大又は小なりと云ひ得べき分數存在することなし、相隣接せる二個の分數は不可有なり。相異なる二つの分數の中間に必ず第三の分數存在す。詳しく言はゞ α β が相異なる分數にして、例へば $\alpha>\beta$ なるときは $\alpha>\mu>\beta$ なる如き分數 μ は必ず存在す。此事實は直に證明せら

るべし、姑らく此事實成立せりとなさんに μ は亦 α と異なるが故に、α、μ の中間に $\alpha>\mu>\beta$ なる分數 μ'、又 α、μ' の中間に $\alpha>\mu''>\mu'$ なる分數 μ'' 存在し、μ、μ'、μ'' はいづれも α、β の中間に横はるが故に、斯の如くにして、相異なる二つの分數の中間には限りなく多くの分數を容るを知るべし。分數の分布各處稠密なりといへるは此意なり。

α、β が相異なる分數にして $\alpha>\beta$ ならば、α、β を同分母の分數となして

$$\alpha=\frac{a}{m},\quad \beta=\frac{b}{m}$$

と置くとき $a>b$ にして a、b は整數なるが故に a、b の差は少くとも 1 に等し。a、b の差 1 より大ならば、a、b の中間に横はれる整數あり、其一つを c と名づけ、$\gamma=\frac{c}{m}$ を採らば $\alpha>\gamma>\beta$ 又若 a、b の差 1 に等しからば h を 1 より大なる自然數となし

$$\alpha=\frac{ah}{mh},\quad \beta=\frac{bh}{mh}$$

となすとき ah と m との差は 1 よりも大なり。是故に如何なる場合にも α、β の中間には必ず第三の分數 μ の存在するを知るべし。

二、等分の可能。 h を以て一の自然數を表はすとき、α なる數 h 個の和を α の h 倍といふ、α の h 倍は α と同一分數班の中に於て之を求め得べし。β が α の h 倍に等しといふことを

$$\beta = h\alpha\ (= \alpha + \alpha + \cdots\cdots + \alpha)$$
$$(1)\quad(2)\quad\cdots\cdots\quad(h)$$

と書く。今 β 及 h が與へられたりとして、α を求めんとするに、α は必しも β と同一の分數班の中に存在せず。例へばある整數を h 等分することは必しも整數の範圍內に於てなさるべくもあらず。然れども凡ての分數を包括せる數の新系統の範圍內にありては、等分は凡ての場合に可能なり。げにも今

$$\beta = \frac{l}{m}$$

と置かば

$$a = \frac{b}{mn}$$

は明に上の條件に適せり。

稠密なる分布、及等分の可能は整數に缺如せる所にして、此二條件は凡ての分數より成立せる數の新範圍が內容の上に於て、果して整數のそれよりも廣大なるを證する著明なる特徵なりといふべし。

此處に於て、尚分數の標準形式につきて一言するの機會を逸すべからず。凡て分數は之を限りなく多くの相異なる形式に表はし得べきことは既に說きたり。$\frac{a}{n}$ なる分數の與へられたるときは、a を如何なる(正の)整數となすとも、恆に

$$\frac{a}{n} = \frac{aa}{an}$$

なることは前節に說きたる分數相等の照準によりて明白なり。此等式を順に又逆に讀むときは、凡て分數の分母及分子に同一の自然數を乘じ、又は分母及

分子を其公約數 d にて除して得らるべき分數は原分數に等しきを知るべし。

今 a、n を其最大公約數にて除し

$$\frac{a}{n}=\frac{a_0}{n_0}$$

を得たりとせば、a_0、n_0 は相素なる整數なり、斯の如く分母と分子とに公約數なき分數を既約分數と云ふ。凡て分數は之を「既約分數に直す」ことを得。既約分數とは特殊なる分數にあらずして、分數の特殊なる形式なり。

又逆に $\frac{a}{n}$ なる分數が $\frac{a_0}{n_0}$ なる既約分數に等しきときは、a 及 n はそれぞれ a_0 及 n_0 の同係數の倍數なり。げにも

$$\frac{a}{n}=\frac{a_0}{n_0}$$

より

$$a\,n_0=a_0\,n$$

を得、此等式は $a\,n_0$ の a_0 の倍數なるべきを示せり。さて n_0 は a_0 と相素なるが

故に第四章(五)によりて a は a_0 の倍数ならざるを得ず、今 $a=a_0d$ と置かば上の等式より $b=b_0d$ を得べきなり。

是故に既約分數は、ある分數の有し得べき種々の形式の中最小の分母を有せるものなり。二個の既約分數の相等しきは其分母及分子各相等しき場合に限る。

(四)

a を分數、n を自然數とするとき、a なる數 n 個の和を a の n 倍といひ、之を表すに na なる記法を以てせり。此定義は n の1より大なるべきを豫想す、今 $0.a=0,\ 1.a=a,\ -n.a=-(na)$ によりて此定義を n が正又は負の任意の整數なる場合に擴充し、$\beta=na$ なるとき β を a の倍數、a を β の約數と稱す。

a の倍數に關する次の諸定理は容易に證明し得べき所なり。

$$ha \pm ka = (h \pm k)a$$

$$h(ka) = hk.a$$

$$h(\alpha\pm\alpha')=h\alpha\pm h\alpha'$$

$h\alpha=0$ なるは $h=0$ 又は $\alpha=0$ なるときに限る、$h\alpha=h'\alpha$ は α の 0 に等しからざる限り必ず $h=h'$ に件ひ、又 $h\alpha=h\alpha'$ は h の 0 ならざる上は必ず $\alpha=\alpha'$ に件ふ。

α の等分は恒に可能にして且一定の結果を與ふ。$h\beta=\alpha$ なる條件に適すべき數 β を表はすに分數の記法を襲用して $\beta=\frac{\alpha}{h}$ となす。$\frac{\alpha}{h}$ なる分數の h 倍は α に等し。よりて分數の分母は必ず正の整數なるべしとの制限を撤去し、一般に

$$\frac{\alpha}{-h}=\frac{-\alpha}{h}$$

となして記法の變通を許すべし。$\frac{\alpha}{h}=\frac{\alpha}{h'}$ は α の 0 ならざる限り必ず $h=h'$ に件ふ。$\frac{\alpha}{h}=\frac{\alpha'}{h}$ は h の 0 ならざるときに限り意義を有し、恒に $\alpha=\alpha'$ に件ふ。

倍加と等分とを引續き適用する場合に、其順序は最終の結果に影響すること

なし。卽ち

$$\frac{ma}{n} = m\left(\frac{a}{n}\right)$$

$\frac{ma}{n}$ とは等分の記法によりて a の m 倍を n 分して得らるべき數にして、$m\left(\frac{a}{n}\right)$ とは a を n 分して得たる數の m 倍なり。此二つの數の相等しきを確めんが爲に其 n 倍を比較すべし。$\frac{ma}{n}$ の n 倍は卽ち ma にして、又 $m\left(\frac{a}{n}\right)$ の n 倍卽ち $n\left\{m\left(\frac{a}{n}\right)\right\}$ は $nm\left(\frac{a}{n}\right) = m\left\{n\left(\frac{a}{n}\right)\right\} = ma$ なり。此相等しき數を表はすに

$$\frac{m}{n}a$$

なる記法を以てす。

今 r、r' 等を以て一般に $\frac{m}{n}$ の如き分數を表はすときは、$ra = r'a$ は a の 0 ならざる限り必ず $r = r'$ に伴ひ、又 $ra = ra'$ は r の 0 ならざる限り必ず $a = a'$ に伴ふ、又

$$ra \pm r'a = (r \pm r')a$$

$$ra \pm ra' = r(a \pm a')$$

α、βが與へられたる分數にしてαが0に非ざるときは、$\beta = \gamma\alpha$なる條件に適すべき分數γは必ず存在す。先づβが0なるときは$\gamma = 0$なり、又βが0にあらざるときはα、βに分母を同じくせる形式を與へて

$$\alpha = \frac{a}{m}, \quad \beta = \frac{b}{m}$$

となし

$$\beta = \frac{b}{a} \cdot \alpha$$

を得。

斯くして定め得たる分數$\frac{b}{a}$を既約分數に直して$\frac{b_0}{a_0}$を得たりとせば

$$\beta = \frac{b_0}{a_0}\alpha$$

にして之を

$$\frac{\alpha}{a_0}=\frac{\beta}{b_0}=\delta$$

$$b_0\alpha=a_0\beta=\mu \qquad \mu=(a_0b_0)\delta \qquad (1)$$

なる形に書き改むることを得。

δはα及βの約數にして、α及βの公約數は必ずδの約數なり。げにも今δ'をα、βの公約數の一となし

$$\alpha=a'\delta', \quad \beta=b'\delta'$$

となさば、之を(1)より得らるべき

$$\alpha=a_0\delta, \quad \beta=b_0\delta$$

と組み合はせて

$$b_0a'\delta'=b'a_0\delta$$

を得、隨て

$$b_0a'=b'a_0$$

にしてa_0、b_0は公約數なき整數なるが故に、屢用ゐたる論法によりて

なる如き整數tの存在すべきを知り

$$a' = a_0 t, \quad b' = b_0 t$$

$$\alpha = a_0 t \delta', \quad \beta = b_0 t \delta'$$

を得、隨て

$$\delta = t\delta'$$

を知る、δ'はδの約數なり。δをα、βの最大公約數と云ふ。最大の語は値の大小に關係なく、單にα、βの公約數は盡くδの約數なるを示せる形容詞なりと認めて可なり。實際δに於て最大なるはα、βの公約數の絕對値なり。然れども大小の關係はこゝに樞要の意義を有せるに非ず。

又μはα及βの倍數にして、α、βの公倍數は必ずμの倍數なり。此意義に於てμをα、βの最小公倍數といふ。げにもμ'をα、βの公倍數の一となしと置けば

$$b'\alpha = a'\beta = \mu'$$

$$\frac{\alpha}{a'} = \frac{\beta}{b'} = \delta'$$

によりて定めらるゝ δ' は α、β の公約數、隨て δ の約數なり。今

$$t\delta' = \delta$$

となさば、(1)の $\alpha = a'\delta' = a_0\delta$ より

$$a' = a_0 t \quad 隨て又 \quad b' = b_0 t$$

を得、これより

$$\mu' = t\mu$$

を得 μ' は μ の倍數なり。

斯の如くにして、最大公約數及最小公倍數の觀念を分數の上に擴張することを得たり。二つの整數の最大公約數が1なるとき此二つの整數を相素なりといへる稱呼は之れを分數の場合に襲用せんこと無用なり。二つの分數は限りなく多くの公約數を有す。

例へば　$\alpha = \frac{5}{12}$,　$\beta = \frac{10}{9}$　となさば

$$\alpha = \frac{15}{36},\quad \beta = \frac{40}{36},\quad \beta = \frac{40}{15}\alpha = \frac{8}{3}\alpha$$

にして

$$\delta = \frac{5}{36},\qquad \mu = \frac{10}{3}$$

$$\alpha = 3\delta,\quad \beta = 8\delta,\qquad \mu = 8\alpha = 3\beta$$

なり。又$\alpha = 7, \beta = 3$とせば$\delta = 1$にして、凡て1を分子とせる分數は盡く7、3の公約數なり。

（五）

倍數及約數なる語によりて言ひ表はされたる、二數の關係を擴張して、比の觀念を得。α、βの最大公約數をδとし$\alpha = k\delta, \beta = k'\delta$と置き、符號の不定を避けんが爲に$k$を正となす如く$\delta$の符號を定むるものとせば斯の如くにして$\alpha$、$\beta$なる二つの與へられたる數より一定の相素なる一對の整數k、k'を得。さて此手續きによりてα'、β'より同一の整數k、k'の導き出さるゝときは、α、βの

比と α'、β' との比相等しと稱し、之を書き表すに

$$\alpha:\beta=\alpha':\beta'$$

なる記法を以てす。此意義に從て

$$\alpha:\beta=h:k,\qquad \alpha':\beta'=h:k$$

同一の比に等しき二つの比は亦相等し。$\frac{h}{k}$ が既約分數なるときは $\frac{h}{k}$ と 1 との最大公約數は $\frac{1}{k}$ に等しく

$$\frac{h}{k}:1=h:k$$

なり。是故に凡て二つの數の比は或定まれる相素なる一對の整數の比に等しく、又或定まれる分數と1との比に等し。

此一定の分數 $\frac{h}{k}$ を $\alpha:\beta$ なる比の値と稱す。相等しき比は同一の値を有し、同一の値を有する比は相等し。向後思想の紛亂の虞なきこと明なる場合には比の値といふべきを略して單に比といふことあるべし。

$\alpha:\beta$ なる比の値 r なりといふことを書き表はすに

なる記法を用ゐる、此場合には前節に說きたる意義に從ひて

$$\alpha:\beta=\gamma$$

$$\alpha=\gamma\beta$$

なり。例へば

$$-\frac{3}{5}:\frac{9}{10}=-2:3=-\frac{2}{3}\qquad -\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$-\frac{3}{7}:-1=3:7=\frac{3}{7}\qquad -\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\left(-1\right)$$

α、β を一般に二つの數、a、b を二つの整數となすときは

$$(1)\ \alpha:\beta=a:b,\quad (2)\ \alpha:\beta=\frac{a}{b},\quad (3)\ \frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b},\quad (4)\ b\alpha=a\beta$$

はいづれも同一の事實を表はせり。

二つの比の相等しきを表はせる等式を比例式といふ。

$$\alpha:\beta=\alpha':\beta'$$

なる比例式成立するときは、$\alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'$ は比例を成せりといふ。$\alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'$ なる

四つの數比例を成せるときは、其中三つの與へらるゝとき、第四の者は自ら定まる。此第四者を定むるを比例を解くといふ。

比例を成せる四つの數の中、三つの與へられたるは卽ち相等しかるべき二つの比の中の一つと、他の一つの比の兩項の中一つとが與へられたるなり。是故に比例を解くとは、r の與へられたるとき

$$r : x \quad 又は \quad x : r$$

なる比の値を與へられたる數に等しからしむべく x を定むるに外ならず。此與へられたる値を $\frac{a}{b}$ となし

$$r : x = \frac{a}{b}$$

なるべきを要求するは、畢竟

$$ax = br$$

なる條件により x を定めんとするなり。是故に $x = \frac{br}{a}$ なり。$x : r$ の場合も亦同樣なり。

α、β を與へて $\alpha:\beta$ の値を求むるは

$$\alpha:\beta=\gamma:1$$

を解きて γ を定むるに外ならず。

$\alpha:\beta$ の値が整數 k に等しきときは α は β の k 倍なり。此場合に $\alpha:\beta$ の値を求むるは $\alpha=k\beta$ より k を定むることにして、是即ち倍加の問題の轉倒なり。是故に吾輩は除法の意義を擴張して、α、β より

$$\alpha:\beta=\gamma$$

なる條件に適すべき數 γ を定むる算法を分數の除法と名づけんとす。實、法、商の語又此場合に襲用すべし。分數除法は法が0ならざる限り、凡ての場合に可能にして常に唯一の結果を與ふ、又特別の場合に於て實及法が共に整數にして實が法の倍數なるときは、商は整數除法の商と異ならず。整數の除法はこゝに定めたる除法の特例たるに過ぎずと謂ふべし。

此意義に從ふときは整數 a を整數 n にて除して得たる商は即ち分數 $\frac{a}{n}$ な

り。

整數 b に整數 k を乘ずるは $x:b=k$ より x を定むるに同じく、β を k 倍するは $x:\beta=k$ より x を定むるに異ならず。一般に β 及 γ を與へて

$$\alpha:\beta=\gamma$$

なる條件に適合すべき α を定むるは卽ち除法の轉倒にして、此算法は特別の場合として整數の乘法及一般に數の倍加を包括す。是故に此算法を仍乘法と名づけ、α β γ の關係を表すに

$$\alpha=\beta\gamma$$

なる記法を以てす。因子及積の語又此場合に襲用すべし。β に γ を乘ずるは畢竟

$$\alpha:\beta=\gamma:1$$

なる比例式を解きて α を定むるに歸着し、α は β γ と共に全く定まる。

分數の乘法、除法は比例式解法の特例に過ぎず、其演算は次の如くにして整數

の乘法及除法に歸着せしむることを得。

先づ

$$\beta=\frac{b'}{b},\quad \gamma=\frac{c'}{c}$$

と置き $\alpha:\beta=\gamma:1$ を解きて $\alpha=\beta\gamma$ を求めん爲に、右邊の比を $c':c$ となして前節の比例解法を適用すれば

$$\beta\gamma=\frac{b'c'}{bc}$$

を得。此結果は分數乘法の組み合はせの法則及交換の法則に遵ふを明示するものなり。

今更に

加法減法に對する分配の法則も亦此結果を用ゐて容易に證明することを得、

$$\gamma=\frac{c''}{c}$$

と置けば

$$\beta(\gamma \pm \gamma') = \frac{b'}{b}\,\frac{c' \pm c''}{c} = \frac{b'(c' \pm c'')}{bc}$$

$$= \frac{b'c' \pm b'c''}{bc} = \frac{b'c'}{bc} \pm \frac{b'c''}{bc}$$

$$= \beta\gamma \pm \beta\gamma'$$

こゝにγ'の分母をγの分母と同一となせるは、此法則の汎通を妨くるものにあらざるや明白なり。

乘法に於て因子の形式の異同は積に影響することなし、即ち$\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ならば必ず$\beta\gamma = \beta'\gamma'$なるべし。こは此の兩項を夫々之に等しき數を以て置き換ふるも此の値變することなしといへる事實の當然の結果なり。是故に$\beta = \gamma$より$\beta\alpha = \gamma\alpha$を得。然れども又逆に$\beta\alpha = \gamma\alpha$なるときは必ず$\beta = \gamma$なりといふことを得べし、げにも$\beta\alpha : \alpha = \beta$, $\gamma\alpha : \alpha = \gamma$にして$\beta\alpha = \gamma\alpha$は$\beta = \gamma$に隨伴せざるを得ず。$\alpha$の0なる場合は例外なるを忘るゝことなかれ。

比例式の外項の積と內項の積とは相等し、卽ち

$$\alpha:\beta = \gamma:\delta$$

なるときは又

$$\alpha\delta = \beta\gamma$$

にして、且此二つは實は同一の關係なり。げにも先づ $\alpha:\beta = \gamma:\delta$ なるとき此相等しき二つの比の値を ε と名づくれば $\alpha = \beta\varepsilon$, $\gamma = \delta\varepsilon$ よりて $\alpha(\delta\varepsilon) = (\beta\varepsilon)\gamma$ 乘法の組み合はせの法則により $\alpha\delta\varepsilon = \beta\gamma\varepsilon$ 隨て $\alpha\delta = \beta\gamma$ 又逆に $\alpha\delta = \beta\gamma$ なるときは $\alpha:\beta$ の値を ε と名づけ、$\alpha = \beta\varepsilon$ を得、隨て順次 $\beta\varepsilon\delta = \beta\gamma$ $\varepsilon\delta = \gamma$ $\gamma:\delta = \varepsilon$ を經て $\alpha:\beta = \gamma:\delta$ に達す。是故に

$$\alpha:\beta = \gamma:\delta$$

$$\alpha:\gamma = \beta:\delta$$

$$\beta:\alpha = \delta:\gamma$$

は必ず相隨件す。

比の兩項に 0 と異なる同一の數を乘ずるも、比の値變することなし、卽ち

$\alpha:\beta = \alpha\gamma:\beta\gamma$ げにも $\alpha(\beta\gamma) = \beta(\alpha\gamma)$

$\beta = \frac{b'}{b},\ \beta' = \frac{b}{b'}$ なる二つの數は $\beta\beta' = 1$ なる關係をなせり、而して此等式は β、β' の中の一つと共に他の一つを定むるものなり、斯の如き二數 β、β' を互に逆なる數といふ。β、β' が互に逆なる數なるときは

$$\beta : 1 = 1 : \beta'$$

なり。此結果を利用して

$$\alpha = \frac{a'}{a},\quad \beta = \frac{b'}{b}$$

なるとき

$$\alpha : \beta = \gamma : 1$$

を解きて $\gamma = \alpha : \beta$ を求めんとするに、先づ β の逆數 $\beta' = \frac{b}{b'}$ を採り之を左邊に立てる比の兩項に乘じて $\alpha\beta' : 1 = \gamma : 1$ を獲、これより直に $\gamma = \alpha\beta'$ 卽ち

$$\alpha : \beta = \frac{a'b}{ab'}$$

を得、α を β にて除するは、α に β の逆數 β' を乘ずるに異ならず。分數の範圍內にありては、乘法除法、其致一なり。

β、γ の積は $\alpha:\beta=\gamma:1$ の ξ に代入して此比例式を成立せしむべき數なりとの乗法の定義は一の缺陷を有す。そは β の 0 なる場合に於て $\alpha:0$ なる比隨て $0.\gamma$ の如き積の意義なきこと是なり。然れども γ の 0 なるときは $0:1=0$ より $\alpha=\beta.0=0$ を得べくして、乗法は一般に交換の法則に從ふが故に、$0.\gamma$ も亦 0 なるべしと定めて、此缺陷を補ふことを得べし。

法の 0 なる除法に意義なきは勿論にして、此點につきて誤解あるべからず。

第六章　分數に關する整數論的の研究

最小公倍數及最大公約數○冪の定義の擴張、負の指數○素數分解の應用○分數を部分的分數に分解すること○與へらたる分母を有する既約眞分數の數、ガウスの函數 $\varphi(n)$、其性質及算式○分數の展開、命數法、小數○循環小數の起源○フェルマーの定理の間接證明○小數の四則演算

（一）

前章に於て定めたる分數除法の意義に從ふときは、α が β の倍數なるは $\frac{\alpha}{\beta}$ なる商が整數に等しき場合に限れり。整除に關する基本の二定理は分數につきても亦整數の場合に於けると同一なり、曰く、

一、α、α' が共に β の倍數なるときは $\alpha \pm \alpha'$ も亦 β の倍數なり。

二、α は β の倍數、β は γ の倍數ならば、α は亦 γ の倍數なり。

げにも α、α' は β の倍數なるが故に $\alpha = a\beta$, $\alpha' = a'\beta$ なる如き整數 a、a' は存在す、さて $\alpha \pm \alpha' = (a \pm a')\beta$ にして $a \pm a'$ は整數なるが故に $\alpha \pm \alpha'$ は β の倍數なり。二の證亦類推すべし。

整除に關する性質につきては數の正負は度外に置きて可なり。後文の說明中關係せる數の符號より論理の不明を生ずべき場合には、其數皆正なりとなすべし。又單に分數の分母分子と稱するは、特に其然らざるを明言せざる限り、此分數に等しき既約分數の分母、分子を指せるものとす。前章の例に倣ひて一般にギリシヤ文字を以て分數を表はし、イタリツクを以て整數を表はさんと

す。

さてβ、β'を既約分數の形式に表はして

$$\beta=\frac{a}{n},\quad \beta'=\frac{a'}{n'}$$

と置くときβ'がβの倍數なるが爲に必須にして且完全なる條件は如何。$\dfrac{\beta'}{\beta}=\dfrac{a'n}{n'a}$なるが如き整數$k$存在せば$\dfrac{a'}{n'}=\dfrac{ka}{n}$より

$$a'n=kan'$$

を得、$a'n$はaによりて整除せられ、而もnはaと素なるが故に第四章(五)によりてa'はaによりて整除せられざるを得ず、又$a'n$はn'によりて整除せられ、而もa'はn'と素なりといふが故に、nはn'によりて整除せられざるを得ず。又若し倒にa'はaの倍數$\dfrac{a'}{a}=p$又nはn'の倍數$\dfrac{n}{n'}=q$なりとせば

$$\frac{a'}{n'}=\frac{pa}{n'}=\frac{pqa}{n}=(pq)\frac{a}{n}.$$

卽ちβ'はβのpq倍なり。是故に次の定理を得。

一、β'がβの倍數なる爲にはβ'の分子はβの分子の倍數なること及びβ'の分母はβの分母の約數なるを必要とし又之を以て足れりとす。βがβ'の約數なる爲にはβの分子はβ'の分子の約數なること及びβの分母はβ'の分母の倍數なることを必要とし又之を以て足れりとす。

此定理を利用して直に次の結果に到達すべし。

二、β、β'、……の公倍數の分子は此等諸分數の分子の公倍數にして、其分母は諸分數の分母の公約數なり、故にβ、β'……の最小公倍數μの分子はβ、β'……の分子の最小公倍數にして、μの分母はβ、β'……の分母の最大公約數なり。

β、β'……の公約數の分子は此等諸分數の分子の公約數にして、其分母は諸分數の分母の公倍數なり、故にβ、β'……の最大公約數δの分子はβ、β'……の分子の最大公約數にして、δの分母はβ、β'……の分母の最小公倍數なり。

例、

$$\beta=\frac{5}{6},\quad \beta'=\frac{3}{8},\quad \beta''=\frac{15}{4}$$

分子の最小公倍數　15　　分母の最大公約數　2
分子の最大公約數　1　　分母の最小公倍數　24

$$\mu = \frac{15}{2} = 9 \cdot \beta \qquad \nu = \frac{1}{24} = \beta : 20$$
$$= 20\beta' \qquad\qquad = \beta' : 9$$
$$= 2\beta'' \qquad\qquad = \beta'' : 90$$

整數の場合にありては、無限に多くの整數に最大公約數あり得べし、例へば凡ての偶數の最大公約數は2なるが如し。然れども無限に多くの分數を與ふるときは、其公約數は必ずしも存在せず、例へば $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$……一般に $\frac{1}{2n}$ の如きあらゆる分數を考ふるに、其公約數なるもの有ることなし。上文の說明に於て β、β'……等與へられたる分數の數には限りあるべきものと解すること必要なり。

分數の最小公倍數、最大公約數の觀念は其眞髓に於ては整數のそれらと異なることなし、然れども第四章に用ゐたる證明を其儘分數の場合に適用するこ

とを得ず、讀者試に其の然る所以を考究せば、得る所少からざるべし。

β、β'……の最小公倍數を μ、又其最大公約數を δ と名づけ

$$\mu = k\beta = k'\beta' = \cdots\cdots$$

$$\beta = l\delta,\quad \beta' = l'\delta \cdots\cdots$$

と置かば、整數 k、k'……及 l、l'……の最大公約數はいづれも1なり。

二つの數 α、β の最大公約數を δ、最小公倍數を μ とせば

$$\alpha\beta = \delta\mu$$

以上二定理の證明をば練習の資料として讀者に薦めんとす。

(二)

素數分解を分數に適用せんが爲に、先づ冪の定義を擴張して、指數が負の整數なる場合に及ぼさんとす。

指數 n が自然數なるとき、a^n は a なる因子 n 個の積を表はせりといふ冪の定義を基礎となすに、分數乘法の意義既に定まりたる上は基數 a が分數なり

とも a^n なる冪は此定義に從て完全なる意義を有し、冪につきて第二章(六八)に説きたる諸定理は、基數が分數(正又は負の)なる場合にも、其まゝ適用せられ得べし。要するに冪の凡ての性質は次の二等式より推定し得べきものなり。

$$a^1 = a \quad (1)$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \quad (2)$$

吾人は今指數は自然數なるべしとの制限を撤去し、此二等式を以て冪の定義として、以て冪の觀念を指數 n が 0 又は負の整數なる場合に擴充せんとす。基數 a が 0 なる場合は姑らく之を度外に措かんに、(2) に於て n に代ふるに 0 を以てするときは $a^1 = a^0 \cdot a$ を得、更に (1) を用ゐて $a = a^0 a$ さて a は 0 にあらずとせるにより

$$a^0 = 1 \quad (3)$$

指數が 0 なる場合に於ける冪の意義は之によりて定まる。次に (2) に於て n に代ふるに -1 を以てせば $a^0 = a^{-1} \cdot a$ 即ち (3) によりて $1 = a^{-1} \cdot a$ よりて

$$a^{-1}=\frac{1}{a}$$

次に(2)に於てnに代ふるに順次$-2, -3$……を以てするときは、

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2},\quad a^{-3}=\frac{1}{a^3},\quad\ldots\ldots$$

を得。一般に

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad (4)$$

なるべきは数學的歸納法によりて容易に證明し得べし。

冪の新意義に從ふとき、第二章(六)の諸定理は仍ほ成立すべし。

$$\left.\begin{array}{l} a^{m+n}=a^m\cdot a^n \\ a^{m-n}=a^m : a^n \end{array}\right\} \qquad (5)$$

$$(a^m)^n=a^{mn} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} (ab)^n=a^n b^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

此等の定理の證明は二樣の方法によりて成され得べし。〔其一はこゝに冪の定義となせる(1)(2)の等式は第三章(四)に於て乘法に與へたる定義に酷似せることに着眼して彼處の證明法を摸倣するなり。又一は此等の諸定理は指數が正なるとき既に成立せるが故に(3)及(4)を用ゐて指數が0又は負數なる場合をば指數の正なる場合に歸着せしむるなり。今簡單に第一の方法によりて(5)を又第二の方法によりて(6)を證明し、其他は讀者の補充を待たんとす。

(5)の兩等式は負の指數の許せられたる上は、實は同一の事實を表はせるものなること明白なれば、こゝには唯其前なる一つを證明すれば足れり。さて此等式が、nの0、±1なる場合に成立すべきことは(3)(2)(4)の最直接なる結果なり。nより$n\pm1$に移らんに、

$$a^{m+(n\pm1)} = a^{m+n\pm1} = a^{m+n}\cdot a^{\pm1}$$

$$= a^m\cdot a^n\cdot a^{\pm1} = a^m\cdot(a^n\cdot a^{\pm1})$$

$$= a^m\cdot a^{n\pm1}$$

此處に用ゐたる論法の根據は加法の組み合はせの法則、mに代ふるに$m+n$又nに代ふるに±1を以てせる(5)、nの場合の(5)、乘法の組み合はせの法則、mに代ふるにn、nに代ふるに±1を以てせる(5)にして最後に到着せるは卽ち$n\pm1$の場合の(5)なり。數學的歸納法の兩段完成せり。

m、n兩ながら正にはあらざる場合に(6)を證明せんに、先づm又はnの中少くとも一つが0なる場合は兩邊共に1となりて落着す。さてm、nを自然數とし

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{(-m)n}$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = 〃 = 〃 = a^{m(-n)}$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)}$$

によりて凡ての場合を落着せしむ。

基數1なるときは冪は指數に關係なく常に1なり。基數正數ならば冪は恆に

正にして基數負數ならば冪は指數の偶數たり奇數たるに從ひて或は正或は負なり。基數0なる冪は指數が自然數なる場合に限りて意義を有す。指數の變動に伴ふ冪の變動につきては後條更に說く所あるべし。

（三）

素數分解を分數に適用するに當り、其分數の正負は問題に關係なきが故に之を度外に置くべし。今

$$x = \frac{a'}{a}$$

なる分數與へられたるとき其分母及分子a、a'を素數冪に分解し

$$a = p^{e}q^{f}\cdots\cdots$$

$$a' = p^{e'}q^{f'}\cdots\cdots$$

を得

$$x = p^{-e}q^{-f}\cdots p^{e'}q^{f'}\cdots\cdots$$

とし、此式の右邊に於て更に同一の素數因子（分母、及分子に共通せしもの）を

一個の冪に集むるときは

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots\ldots$$

を得、こゝに p_1、p_2、p_3… は相異なる素數にして、指數 e_1 e_2 e_3… は正又は負の整數なり。此等の素數冪の中、正の指數を有せるものゝみの積及負の指數を有せるものゝ積は、それぞれ a に等しき既約分數の分子及分母に該當す。

例へば

$$a = \frac{100}{126}$$

$$100 = 2^2.5^2, \qquad 126 = 2.3^2.7$$

$$a = 2^2.5^2.2^{-1}3^{-2}7^{-1}$$

$$= 2.3^{-2}.5^2 7^{-1}$$

或分數を斯の如く素數冪に分解するときは唯一の結果を得べきこと明白なり。

こゝに後文に引用せん爲、次の事實を特筆す。p_1、p_2、p_3… が相異なる素數を表はすときは

$$p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3}\ldots\ldots$$

の如き積は指數e_1、e_2、e_3…が盡く正(或は0)なるときに限り、整數に等しきことを得、特に此積が1に等しきは指數が盡く0なるときに限る。

二個以上の數の整除に關する關係を論ぜんが爲に因子として此等の數の中少くともいづれか一つに關係せる素數を盡く採りて之をp_1、p_2、p_3…と名づけ、此中或素數が或一つの數に關係せざることを表はす爲には數の分解式の中にて該素數に指數0を附することゝし

$$\beta = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3}\ldots\ldots$$

$$\beta' = p_1^{e'_1} p_2^{e'_2} p_3^{e'_3}\ldots\ldots$$

と置き、さてβ'がβの倍數たるべき條件を求めんとす。此條件は甚だ簡單なり。$\beta':\beta = p_1^{e'_1-e_1} p_2^{e'_2-e_2} p_3^{e'_3-e_3}\ldots\ldots$が整數なるべき爲には、前に述べたる所により

$$e'_1-e_1 \geqq 0,\quad e'_2-e_2 \geqq 0,\quad e'_3-e_3 \geqq 0\ldots\ldots$$

卽ち

$$e_1 \geqq e_1',\ e_2 \geqq e_2',\ e_3 \geqq e_3',\ \ldots\ldots$$

なるを要し、又之を以て足れりとす。

β、β′…の最大公約數δ及最小公倍數μを得んと欲せば

$$\delta = p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \ldots\ldots$$

に於てd_1をe_1、e_1'…の中最小の者、d_2をe_2、e_2'…の中最小の者となすべく、又

$$\mu = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \ldots\ldots$$

に於てm_1、m_2…をそれぞれe_1、e_1'…、e_2、e_2'…の中最大の者となすべし。

例へば

$$\beta = \frac{5}{6} = 2^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot 5$$

$$\beta' = \frac{3}{8} = 2^{-3} \cdot 3 \cdot 5^{0}$$

$$\beta'' = \frac{15}{4} = 2^{-2} \cdot 3 \cdot 5$$

$$c_1=-1,\ c_1'=-3,\ c_1''=-2;\quad d_1=-3,\ m_1=-1$$
$$c_2=-1,\ c_2'=1,\ c_2''=1;\quad d_2=-1,\ m_2=1$$
$$c_3=1,\ c_3'=0,\ c_3''=1;\quad d_3=0,\ m_3=1$$
$$\delta=2^{-3}\cdot 3^{-1}\cdot 5^{0}=\frac{1}{24}$$
$$\mu=2^{-1}\cdot 3^{1}\cdot 5^{1}=\frac{15}{2}$$

(一)の例を參照すべし。

素數分解を利用して、前節に述べたる分數の最大公約數及び最小公倍數に關係せる諸定理を證明せんこと、初學者に有益なる練習なり。

(四)

正又は負の既約分數 m/n の與へられ、其分母 n が相素なる二つの整數 a、b の積に等しきとき、此分數を分母 a 及 b なる二つの分數の和として表はさんことを要求す。此問題は第四章(五)に說きたるヂォファント方程式の解法に歸着すること次の如し。

$$\frac{m}{n} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \qquad (1)$$

は

$$m = ba' + ab'$$

と同一に歸するが故に、a'、b' は

$$m = bx + ay$$

なるヂオファント方程式の一對の解答なることを要し、又之を以て足れりとす。($x = a'$, $y = b'$) さて a、b は相素なるが故に此方程式は必ず、而も限りなく多くの、整數の解答を有す。此等の解答の中 x が a より小なる正の整數なる者唯一對あり。若し此特殊なる解答を採らば a'/a を正の眞分數（1より小なる分數）となすことを得れども既に a' を斯く定めたる上は b' も亦自ら定まるべきが故に b'/b は或は正或は負にして其絶對値は或は1より大或は1より小なるべし。

例へば $\frac{1}{60}$ の分母60を相素なる整數4、及び15の積となして、$\frac{1}{60}$ を分母4

及び15なる分數の和に分解せんが爲に

$$1 = 15x + 4y$$

を解けば

$$x = -1 + 4t, \quad y = 4 - 15t$$

を得、tを0、1、−1……となして

$$\left.\begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 3 \\ y = -11 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = -5 \\ y = 19 \end{matrix}\right\} \cdots\cdots$$

を得、隨て

$$\frac{1}{60} = \frac{-1}{4} + \frac{4}{15} = \frac{3}{4} - \frac{11}{15} = \frac{-5}{4} + \frac{19}{15} = \cdots\cdots$$

若し4を分母とせる分數が正にして1より小なるべきを要せば第二の分解を採るべし、又15を分母とせる分數が正にして1より小なるべきを欲せば第一の分解を採るべし。此時同時に他の一分數にも或條件を充實せしめんとするは、卽ち例へば其正なること又は1より小なることを望むは過當の要求な

り。

若し分母 n が二つづゝ相素なる整數 a、b、c… の積なるときは右の方法を連用して、先づ $\frac{m}{n}$ を分母 a なる分數及び分母 bc… なる分數の和となし、更に此第二の分數を分解して分母 b なる分數及分母 c… なる分數の和となし、斯の如くにして竟に $\frac{m}{n}$ を分解して、a、b、c…等を分母とせる分數の和となすことを得。

$$n = abc\cdots\cdots,\quad \frac{m}{n} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \cdots\cdots$$

此場合に於ても亦 a、b、…… を分母とせる分數が正の眞分數なるべきを要求することを得べしと雖、唯最後の一分數は其他の分數の定まると共に自ら定まるべきが故に、此の一つの分數には何等の條件をも豫定することを得ざるべし。

例へば

$$\frac{1}{60} = \frac{3}{4} + \frac{-11}{15}$$

よりて

$$\frac{-11}{15} = \frac{2}{3} - \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{60} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{7}{5}$$

若し強て凡ての分數が正の眞分數たるべきを欲せば、分解式の右邊に正又は負の整數一項を添加するを避くべからず。例へば $m = m m' n$ なるとき既に $\frac{a'}{a}$、$\frac{b'}{b}$ を正の眞分數となしたる上は $\frac{c'}{c}$ は自ら定まれり、さて $\frac{c'}{c}$ は大小の順序に於て或隣接せる二つの整數の中間に落ち、例へば

$$k < \frac{c'}{c} < k + 1$$

となる、k は正又は負の整數なり。されば

$$\frac{c'}{c} - k = \frac{c''}{c}$$

と置くとき

$$0 < \frac{c''}{c} < 1$$

にして卽ち $\frac{c''}{c}$ は正の眞分數なり。よりて $\frac{m}{n}$ の分解式に次の形狀を與ふることを得。

$$\frac{m}{n}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c''}{c}+k$$

例へば上に揭げたる $\frac{1}{60}$ の分解式に於て

$$-2<\frac{-7}{5}<-1$$

よりて

$$\frac{-7}{5}+2=\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{60}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-2$$

以上の所論を總括して次の定理を得。

分數 $\frac{m}{n}$ の分母 n が二つづゝ相素なる整數 a、b、c…の積に等しきときは

$$\frac{m}{n}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\dots\pm q \qquad (3)$$

の如く $\frac{m}{n}$ を部分的分數の和に分解することを得、此處右邊の諸分數はいづれも正の眞分數にして g は或整數なり。

斯の如き特殊の制限の下にありては $\frac{m}{n}$ の定まれるときは如上の分解は唯一の結果を與ふべきこと上文說明の裡に明示せられたり。此點は亦次の如くにして直接に之を確むることを得べし、上の等式の兩邊に n を乘ずれば

$$m = a'(bc\cdots) + b'(ac\cdots) + c'(ab\cdots) + \cdots\cdots \pm g(abc\cdots)$$

を得、之を

$$m = a'h + ak$$

$$h = bc\cdots\cdots = \frac{n}{a}$$

と書くことを得、h、k は次に記する如き整數なり

$$k = b'(c\cdots) + c'(b\cdots) + \cdots \pm g(bc\cdots) = b'\frac{n}{ab} + c'\frac{n}{ac} + \cdots \pm g.\frac{n}{a}$$

是故に

$$m = hx + ay$$

なるヂォファント方程式は $x=\xi$, $y=\eta$ なる解答を有し、且 n と n とは相素なるが故に此方程式の解答の中 $n>x>0$ なる條件に適合すべきもの唯一個 $(x=\xi)$ を外にして存在することを得ず。即ち a' は一定の數なり。b'、c' ……につきても亦同じく、隨て $\pm g$ も亦一定の整數なり。

n を素數冪に分解して

$$n=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\cdots\cdots$$

を得たりとせば、上の結果により

$$\frac{m}{n}=\frac{P}{p^{\alpha}}+\frac{Q}{q^{\beta}}+\frac{R}{r^{\gamma}}+\cdots\cdots\pm g \qquad (十)$$

を得、P、Q、R…はそれぞれ p^{α}、q^{β}、r^{γ}…より小なる正の整數なり。これら P、Q、R…等を p、q、r…の冪に從て展開し

$$P=\pi_1 p^{\alpha-1}+\pi_2 p^{\alpha-2}+\cdots\cdots+\pi_{\alpha-1}p+\pi_{\alpha}, \qquad p>\pi\geqq 0,$$

$$Q=\kappa_1 q^{\beta-1}+\kappa_2 q^{\beta-2}+\cdots\cdots+\kappa_{\beta-1}q+\kappa_{\beta}, \qquad q>\kappa\geqq 0,$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

となす。こゝに係數 x_1、x_2…x_α、y_1 y_2… y_β 等はそれぞれ p、q 等より小なる正の整數なるべきこと勿論なり。之を(4)に收用して

$$\frac{m}{n}=\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}+\cdots\cdots+\frac{x_\alpha}{p^\alpha}+\frac{y_1}{q}+\frac{y_2}{q^2}+\cdots\cdots+\frac{y_\beta}{q^\beta}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\pm g \qquad (5)$$

を獲。

此處になほ次節に引用すべき一の事實を附記すべし。m/n が既約分數なるときは(1)(2)(3)(4)等の右邊に現はれたる分數は、いづれも亦既約分數なるべきこと明白なり。又逆に a、b、c…が二つづゝ相素なるときは

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\cdots\cdots\pm g$$

の如き和は、a'/a、b'/b、c'/c…が盡く既約分數なるときは、abc… を分母とせる或既約分數に等し。隨て斯の如き和が一の整數となり得べきは a'/a、b'/b、c'/c

…等の盡く整數なるべき場合に限れり。

(五)

正の整數 n を分母とし、1、2、……n を分子とせる n 個の分數

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots\cdots\cdots\ \frac{n}{n} \qquad (1)$$

の中既約分數なるは幾個ぞ。此數は畢竟1、2、3、……n なる n 個の整數の中 n と相素なるものゝ數に同じ、此數を表はすに、ガウスは

$$\varphi(n)$$

なる記號を用ゐたり。この記號の意義によれば

$$\varphi(1)=1,\quad \varphi(2)=1,\quad \varphi(3)=2,\quad \varphi(4)=2,\ \cdots\cdots$$

なること直に驗證せらるべし。さて $\varphi(n)$ の一般の算式は如何。此問題を解決するに先ち、$\varphi(n)$ の特異なる一性質につきて數言を費さんとす。

d を以て n の約數の一となさば(1)の諸分數を既約分數に直すとき、其中必ず d を分母とせるものを得。又 d を分母とせる既約分數の中1より大ならざる

ものは盡く(1)の中に包括せられたり。げにも今 $n=\delta\delta'$ と置かば(1)の中

$$\frac{\delta'}{n},\ \frac{2\delta'}{n},\ \ldots\ldots,\ \frac{(\delta-1)\delta'}{n},\ \frac{\delta\delta'}{n}$$

なる δ 個はそれぞれ

$$\frac{1}{\delta},\ \frac{2}{\delta},\ \ldots\ldots,\ \frac{\delta-1}{\delta},\ \frac{\delta}{\delta}$$

に等しくして、上に言へる δ を分母とせる既約眞分數は盡くこの δ 個の中に網羅せらる。是によりて d_1、d_2、d_3……を以て n の凡ての約數(1及び n を包む)となし、(1)の n 個の分數を既約分數に直し、之を其分母に從て分類するときは d_1 を分母とせる既約眞分數の全體、其數 $\varphi(d_1)$、d_2 を分母とせる既約眞分數の全體其數 $\varphi(d_2)$…を得、即ち

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\varphi(d_3)+\ldots\ldots=n \qquad (2)$$

例へば n を15とし、(1)なる十五個の分數を既約分數となし

$$\frac{1}{15},\ \frac{2}{15},\ \frac{1}{5},\ \frac{4}{15},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{7}{15},\ \frac{8}{15},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{11}{15},\ \frac{4}{5},\ \frac{13}{15},\ \frac{14}{15},\ 1$$

を得。之を分母に従ひて四類に分つに

$$\varphi(1)=1:\quad 1$$

$$\varphi(3)=2:\quad \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$$

$$\varphi(5)=4:\quad \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

$$\varphi(15)=8:\quad \frac{1}{15},\ \frac{2}{15},\ \frac{4}{15},\ \frac{7}{15},\ \frac{8}{15},\ \frac{11}{15},\ \frac{13}{15},\ \frac{14}{15}.$$

$$\varphi(1)+\varphi(3)+\varphi(5)+\varphi(15)=$$
$$1+2+4+8=15.$$

nの凡ての約數dにつきて$\varphi(d)$を作れば其和nに等し、といふ整數論にて有名なる定理は分數を利用して甚簡單に證明せられたり。

nが相素なる二つの整數a、bの積に等しきとき$(n=ab)$

$$\frac{m}{n}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\pm g \qquad (3)$$

なる等式を二様に觀察することを得。第一、左邊の分數を逐次nを分母とせる$\varphi(n)$個の既約眞分數となし、右邊は前節に述べたるが如くにして、之を部分的分數に分解せるものなりとなさば、右邊の分數a'/a、b'/bは共に既約分數

にして(前節の結尾を看よ)且 $\pm g$ は 0 又は -1 の外に出でず。よりて斯の如くにして得たる $\varphi(ab)$ 個の等式(3)の右邊の分數部分は盡く相異にして、こゝに現はるゝ二つの分數はそれぞれ a、b を分母とせる $\varphi(a)$ 個 $\varphi(b)$ 個の既約眞分數一つ一つの相異なる組み合はせなり。是故に

$$\varphi(ab) \leqq \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

次に又(3)の右邊に立てる二つの分數を逐次 a、b を分母とせる $\varphi(a)$ 個 $\varphi(b)$ 個の既約眞分數となし $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ が 1 より小なるときは g を 0、又此和が 1 より大なるときは $\pm g$ を -1 となし行かば、斯の如くにして作らるゝ $\varphi(a)\cdot\varphi(b)$ 個の等式(3)の左邊に現はれ來るものはいづれも ab を分母とせる盡く相異なる既約眞分數なり。(前節の結尾を看よ)是故に

$$\varphi(ab) \geqq \varphi(a)\varphi(b)$$

以上二樣の結論を綜合して次の定理を得、

a、b が相素なる整數なるときは $\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$　　(4)

此結果は之を因子二個以上の場合に擴張することを得、a、b、c…が二つづゝ相素なる整數なるときは、先づ a と $bc\cdots\cdots$ とは相素なるが故に

$$\varphi(a.bc\cdots) = \varphi(a).\varphi(bc\cdots)$$

同じ様にして $\varphi(bc\cdots) = \varphi(b)\varphi(c\cdots)$, $\varphi(c\cdots) = \varphi(c)\cdots\cdots$ を得、竟に

$$\varphi(a.b.c\cdots) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\cdots\cdots \qquad (4^*)$$

に達す。今 n を素數冪に分解して

$$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma\cdots\cdots$$

を得たりとせば

$$\varphi(n) = \varphi(p^\alpha)\varphi(q^\beta)\varphi(r^\gamma)\cdots\cdots \qquad (5)$$

例へば　$n = 15 = 3.5$

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - 1, \qquad \frac{8}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5},$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - 1, \qquad \frac{11}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5},$$

$$\frac{4}{15}=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-1,\qquad \frac{13}{15}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5},$$

$$\frac{7}{15}=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-1,\qquad \frac{14}{15}=\frac{1}{3}+\frac{3}{5},$$

にして右邊には $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ なる $\varphi(3)=2$ 個の分數と $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ なる $\varphi(5)=4$ 個の分數との一つ一つのあらゆる組み合はせが唯一度づゝ立てるを見るべし。

一般に $\varphi(n)$ の算式を求むるは(5)によりて素數冪 p^{α} につきて $\varphi(p^{\alpha})$ を求むるに歸着す。さて1より p^{α} に至る p^{α} 個の整數の中 p^{α} と相素ならざるは p の倍數なる $p, 2p, \ldots\ldots p^{\alpha-1}.p$ の $p^{\alpha-1}$ 個に止まれり、故に

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}=p^{\alpha-1}(p-1)=p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

隨て(5)によりて

$$\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)q^{\beta-1}(q-1)\ldots\ldots$$

又は

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\ldots\ldots$$

こゝに p、q、…は n の約数なる相異なる凡ての素數を表せり。

例へば

$$60 = 2^2.\ 3.\ 5$$

$$\varphi(60) = \varphi(4)\,\varphi(3)\,\varphi(5)$$

$$= 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 16$$

げにも1より60に至る整數の中60と相素なるは次の十六個なり。

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59

(六)

前節に説きたる $\varphi(n)$ の算式を直接に、最初等なる手段によりて再び算出せんが爲に、こゝに尚兩三頁を割愛すべし。

$\varphi(n)$ の算式を得るに次に述ぶる二つの事實を基礎となすことを得べし。

一、p が n の素數因子の一なるときは　$\varphi(pn) = p\,\varphi(n)$

二、素數 p が n の約數ならざるときは　$\varphi(pn) = (p-1)\,\varphi(n)$

今之を證明せんが爲に1よりnに至る整數の中nと相素なる$\nu=\varphi(n)$個を

$$a_1,\quad a_2,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad a_\nu$$

と名づけ、さて此等の數に順次nの倍數を加へて次の表を作る、

$$\begin{array}{llll}
a_1, & a_2, & \cdots\cdots & a_\nu, \\
a_1+n, & a_2+n, & \cdots\cdots & a_\nu+n, \\
a_1+2n, & a_2+2n, & \cdots\cdots & a_\nu+2n, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_1+(p-1)n, & a_2+(p-1)n, & \cdots\cdots & a_\nu+(p-1)n.
\end{array}$$

先づ第一の場合より始めん、こゝに列記せるm個の數は皆mより小にして、いづれもmと相素なり。實にも此等の數の一つ例へばa_h+knとmとを觀るに、若し兩者に公約數あらば、其素數因子の一つをqと名づけんに、qはpに等しきも又は然らざるも、必ずnの約數ならざるを得ず、よりてqがa_h+knの約數ならん爲には、qはa_hの約數隨てa_h及びnの公約數なるを要

す、而も a_h と n とは相素なりといふが故に、是不可有の事に屬す。又逆に b を以て1より pn に至る數の中 pn と相素なるものゝ一なりとせば b は亦 n と相素なり。さて b を n にて除し $b=qn+r,\ n>r>0$ を得たりとせば、r は亦 n と相素なるが故に r は $a_1\ a_2\ldots a_\nu$ の中の一つなり。是によりて b は上の表の中に載せられたる數ならざるを得ず。又 b は pn より大ならざるにより q は p より小なり。上の表に載せたる $p\varphi(n)$ 個の數は1より pn に至る整數の中 pn と相素なるものを盡くせり。卽ち $\varphi(pn)=p\varphi(n)$

第二の場合に於ては、上の表の數は盡く n と相素なれども、p の倍數なるもの各縱列に唯一個づゝ含まれたり。例へば第一の縱列の數につきて言はんに此中の或數が p の倍數ならんが爲には

$$a_1+xn=py$$

なる關係が整の x、y によりて成立せんことを要す、さて p と n とは相素なるが故に此ヂオファント方程式は必ず解答を有し而も x が b より小なる正の

整數なるべき解答は唯一對に限れり。是故に此場合に於ては

$$\varphi(pz) = pz - z$$
$$= (p-1)\varphi(z)$$

上述の結果を利用して $\varphi(z)$ の算式を獲んと欲せば次の如く考ふべし。

先づ p が素數なるときは $\varphi(p) = p-1$ なること明白なり、よりて一によりて順次

$$\varphi(p^2) = p\varphi(p) = p(p-1),\quad \varphi(p^3) = p\varphi(p^2) = p^2(p-1)$$

一般に

$$\varphi(p^\alpha) = p\varphi(p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

次に q は p と異なる素數なりとせば、二によりて $\varphi(p^\alpha q) = (q-1)\varphi(p^\alpha)$ 次に

又一によりて

$$\varphi(p^\alpha q^2) = q\varphi(p^\alpha q) = q(q-1)\varphi(p^\alpha)$$

一般に

$$\varphi(p^\alpha q^\beta) = q^{\beta-1}(q-1);\ \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)\,q^{\beta-1}(q-1)$$

斯の如くにして竟に

$$\varphi(p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots) = \varphi(p^\alpha)\,\varphi(q^\beta)\,\varphi(r^\gamma)\ldots\ldots$$
$$= p^{\alpha-1}(p-1),\ q^{\beta-1}(q-1)\,r^{\gamma-1}(r-1)\ldots\ldots$$

を得。若し形式的に論理の最嚴密ならんことを欲せば數學的歸納法を用ゐるべし。

(七)

吾人は先に倍數の觀念を分數の上に擴充せり、α が β の倍數なりとは $\alpha:\beta$ なる商の整數なるをいふ。α 若し β の倍數ならずば $\alpha=\beta x$ によりて定めらるる x は整數に非ず、x は大小の順序に於て或隣接せる二つの整數の中間に落つ、今

$$n<x<n+1$$

なりとせば $x-n$ は正の眞分數にして隨て

$$\alpha-n\beta=(x-n)\beta=r$$

によりて定められたる r は β より小なる正の分數なり。

是故に一般に α 及び β $(\beta\neq0)$ が與へられたるときは

$$\alpha=n\beta+r,\quad \beta>r\geqq0 \qquad (1)$$

なる條件に適すべき整數 q 及び剩餘 r は必ず存在す。而も斯の如き二つの數が唯一對に限り存在し得べきことは明白なり。第二章(七)の定理は分數の場合に擴張せられたり。

今 α を正の分數とし、α 若し1より大ならば直に α より小なる正の整數を g と名づけ、

$$\alpha = g + \alpha_1$$

と置けば α_1 は正の眞分數なり。さて t を1より大なる自然數となし、$\delta = \frac{1}{t}$ として(1)に於けるが如く

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{t} + \alpha_2 \qquad \frac{1}{t} > \alpha_2 \geqq 0$$

によりて整數 c_1 及び α_2 を定むれば α_1 は1より小なるが故に、c_1 は t より小なり。α_2 若し0ならずば

$$\alpha_2 = \frac{c_2}{t^2} + \alpha_3 \qquad \frac{1}{t^2} > \alpha_3 \geqq 0$$

によりて整數 c_2 及び剩餘 α_3 を定む、c_2 は亦 t より小なり。次第に斯の如くに

して竟に

$$a_n = \frac{c_n}{t^n} + a_{n+1} \qquad \frac{1}{t^n} > a_{n+1} \geqq 0$$

に至り、此等の諸式を一括して

$$a = q + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots\cdots + \frac{c_n}{t^n} + a_{n+1}$$

$$t > c_1, c_2, \cdots\cdots c_n \geqq 0, \qquad \frac{1}{t^n} > a_{n+1} \geqq 0 \qquad (2)$$

を得。aをtの冪に從て展開し、t^{-n}の項に至て止むとき、剩項a_{n+1}はt^{-n}より小なり。

斯の如き展開が唯一の結果を與ふべきことは第二章(七)に於けると同樣なり。

若し

$$a = \frac{\mathbf{a}}{b}$$

と置かば、c_1、c_2、……c_nは次の如くにして定め得べし。$a < 1$なるが故に$\mathbf{a} < b$隨て$\mathbf{a}t^n < bt^n$今$\mathbf{a}t^n$をbにて除し、整數商c及び剩除rを得たりとせば、卽ち

$$at^n = Cb + r, \qquad b > r \geqq 0$$

と置かば、$C < t^n$ にして

$$\alpha_1 = \frac{a}{b} = \frac{C}{t^n} + \frac{r}{bt^n}$$

C を t の冪に從て展開すれば、C は t^n より小なるがゆへに

$$C = c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \cdots\cdots + c_n$$

を得べし、こゝに現はれ來れる係數 c_1 c_2 …… c_n は卽ち(2)の係數と同じく、剩項は

$$\alpha_{n+1} = \frac{r}{bt^n}$$

なり。

斯の如き展開は剩項 α_{n+1} の0となると共に其局を結ぶべし。さて剩項の竟に0となり得べき條件は如何。

α の展開が t^{-n} の項に至て局を結べりとなさば

$$\alpha_1 = \frac{a}{b} = \frac{C}{t^n}$$

よりて

$$t^n = c \cdot b$$

さて a/b を既約分數なりとせば屢用ゐたる論法によりて、b は t^n の約數ならざるを得ず。卽ち b の素數因子は盡く t の中に含まるゝを要す。又逆に b の素數因子は盡く t の中に含まれたりとせば指數 n を適當に選みて、t^n をして b の倍數たらしむることを得べく、n を斯く選まば

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{t^n}$$

なる如き整數 c を得、a/b の展開は實際 t^n の項以上に及ぶことなし。

t を10となすときは(2)は卽ち b を小數の形に表はせり。十進の命數法に於て a/b なる分數が有限の小數として表はされ得べきが爲には、a/b を既約分數となすとき、其分母が2及5以外の素數因子を含まざるべきを要し、又之を以て足れりとす。

實際 $b = 2^{\lambda}5^{\mu}$ なるときは λ、μ の中大なる方を n となすとき、始めて b は 10^n の

約數となり、a/b は分子に關係なく、小數點以下 n 桁の小數として表はされ得べし。

例へば

$$a = \frac{73}{16}, \quad t = 10$$

$$16 = 2^4$$

$$73 \times 10^4 = 16 \times 45625$$

$$\frac{73}{16} = 4.5625.$$

若又 $t = 2$ となすときは

$$\frac{73}{16} = 4 + \frac{1}{2} + * + * + \frac{1}{2^4}$$

* は 2^{-2}、2^{-3} の項の係數 0 なるを示せり。

（八）

分數 a を既約の形式に表はして a/b となすとき、a の展開が有限なるは、分母 b の素數因子盡く命數法の基數 t の約數なる場合に限れることは既に說

きたり。是故に b 若 t に含まれざる素數因子を有せば $\frac{a}{b}$ の展開に於て剩項の0となることなし、此場合に於ては展開の係數は竟に一定の週期を以て循環するに至るべし。

分母 b が t に含まれざる素數因子を有するときは、b を素數冪に分解し、其中 t に含まるゝ素數に屬するものと、然らざるものとを別々に集めて $b=b_0b'$ となさば、b_0 の素數因子は盡く t に含まれ、b' は t と相素なり。しかするときは b_0b' は相素にして、指數 l を適當にとるとき b_0 は t^l の約數となる。さて $\frac{a}{b}$ に t^l を乘ずれば

$$\frac{at^l}{b}=\frac{at^l}{b_0b'}=\frac{a'}{b'}$$

を得、a' は $a\times(t^l:b_0)$ なる整數にして b' と相素なり。b 若 t の素數因子を含まずば b_0 を1 l を0となすべく、隨て $a'=a$ なり。

$\frac{a}{b}$ の展開は之を $\frac{a'}{b'}$ の展開に歸着せしめ得べきが故に、吾輩は始めより

$$x=\frac{a}{b}.$$

なる既約分數の分母 b は t と相素なりとなすべし。

さて先 a を超えざる最大の整數を a より引き去りて

$$a = g + \alpha_1 \qquad \alpha_1 = \frac{a_1}{b}$$

$$0 < \alpha_1 < 1, \qquad a_1 < b$$

となし α_1 の展開の係數 c_1、c_2……を求めんが爲に $a_1 t$ を b にて除し、商 c_1 及剩餘 a_2 を得。次に $a_2 t$ を b にて除し商 c_2 及剩餘 a_3 を得。順次斯の如くなし行きて

$$a_1 t = c_1 b + a_2$$

$$a_2 t = c_2 b + a_3 \qquad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n t = c_n b + a_{n+1}$$

を得、α_1 の展開式を定むること次の如し。

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} \cdots\cdots + \frac{c_n}{t^n} + \alpha_{n+1} \qquad (1^*)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_n t_n}$$

さてbはa_1及tと相素なるが故に、(1)の第一の等式によりてa_2はbと相素なるを知るべし。何となればbとa_2との公約數はa_1tの約數卽ちa_1tとbとの公約數ならざるを得ざるが故にbとa_2との公約數は1を外にしてあり得べからざればなり。a_2とbと相素なるが故に同一の理由によりてa_3とbとも亦相素ならざるを得ず。次第に斯の如くしてa_1、a_2、a_3……等逐次現れ來る剩餘は盡くbと相素なるを知るべし。

a_1、a_2、a_3……は皆bより小なる正の整數にして、bより小なる正の整數に限あるが故にa_1、a_2、a_3……等を何處までも求め行かば、其中に同一の數の反復して出て來ること已むを得ざる所なり。今

$$a_n = a_{n+e}$$

なりとせば

$$a = \frac{q_1}{t} + \frac{q_2}{t^2} + \cdots\cdots + \frac{q_{n-1}}{t^{n-1}} + \frac{a_n}{t^{n-1}} \qquad (2)$$

$$= \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots\cdots + \frac{c_{h-1}}{t^{h-1}} + \frac{c_h}{t^h} + \cdots\cdots + \frac{c_{h+e-1}}{t^{h+e-1}} + \frac{a_{h+e}}{bt^{h+e-1}}$$

より引き算によりて

$$\frac{a_h}{bt^{h-1}} = \frac{c_h}{t^h} + \cdots\cdots + \frac{c_{h+e-1}}{t^{h+e-1}} + \frac{a_h}{bt^{h+e-1}}$$

を得、之を約めて

$$\frac{a_h}{bt^{h-1}} = \frac{C}{t^{h+e-1}} + \frac{a_h}{bt^{h+e-1}}$$

と書く。Cは

$$C = c_h t^{e-1} + \cdots\cdots + c_{h+e-1}$$

なる整數を表せり。上の等式の兩邊にbt^{h+e-1}を乘じ

$$a_h(t^e - 1) = Cb$$

を得。これよりa_hとbと相素なることに着眼して、$t^e - 1$のbの倍數なること卽ち

$$t^e \equiv 1 \pmod{b} \qquad (3)$$

なることを知る。$a_h = a_{h+e}$より(3)を得たり、而して(3)はhなる數に關係なきに

注意すべし。若し倒に(3)の關係成立せりとなさば卽ち或指數 e につきて t^e-1 が b の倍數なりとせば、h を如何なる自然數となすとも(2)より

$$\frac{a_h}{bt^{h-1}} = \frac{C}{t^{h+e-1}} + \frac{a_{h+e}}{bt^{h+e-1}}$$

卽ち

$$a_h t^e - a_{h+e} = Cb$$

$$a_h(t^e-1) + (a_h - a_{h+e}) = Cb$$

を得、さて t^e-1 は b の倍數なりといふが故に $a_h - a_{h+e}$ も亦然り、而も a_h, a_{h+e} は共に b より小なる正數なるが故に $a_h - a_{h+e}$ は絶對値に於て b より小なる整數なり、此整數が b の倍數なりといふは、其0なるべきを意味するが故に

$$a_h = a_{h+e}$$

卽ち(2)にして成立せば、h に關係なく a_h と a_{h+e} と相等しからざるを得ず、卽ち

$$a_1 = a_{1+e} \quad a_2 = a_{2+e} \quad a_3 = a_{3+e} \quad \cdots\cdots\cdots$$

a_1、a_2、a_3 ……等逐次の剩餘の中には同一の數必ず現出すべしとの簡單なる事實

より發足して、若し相距ること e 位なる或二個の剩餘相等しからば $t^e\equiv 1\ (mod.\ b)$ なるべきを知り、逆に $t^e\equiv 1\ (mod.\ b)$ なるときは相距ること e 位なる剩餘はすべて相等しからざるべからざるを確めたり。是剩餘 a_1、a_2、a_3……が $(a_1\ a_2\ldots\ldots a_e)$ なる週期を以て限りなく循環し來るべきを證するものなり。

e を以て t^e-1 を b の倍數たらしむべき最小の正の整數なりとなさば、a_1、a_2……a_e なる週期を組成せる剩餘は盡く相異なり。げにも若し a_1、a_2……a_e の中に相等しきものありて例へば $a_h\equiv a_k\ (e\geqq h>k\geqq 1)$ なりとせば上文辨明せる所により、e より小なる正の指數 $h-k$ につきて既に $t^{h-k}-1$ が b の倍數なりといふ、e に關する規定に撞着せる結論に陷るべきなり。

剩餘 a_1、a_2、a_3……にして既に e 項の週期を以て循環せば、係數 c_1、c_2、c_3……も亦同じく e 項の週期を以て循環せざるを得ず。但し c_1、c_2、……c_e なる一週期の係數は必ずしも盡く相異なりといふことを得ず。a_1、a_2、a_3……より c_1、c_2、c_3……を定めたる(1)の算式を觀るに一般に相等しき a は相等しき c を與ふべけれど

も、總て相等しき e は必ず相等しき a より出て來れりとなすことを得ざるにあらずや。

如上の觀察は吾人を導きて次の結果に到達せしむ。

既約分數 $\frac{a}{b}$ の分母 b が展開の基數 t と相素なるときは、展開の途次現出する剩餘 a_1、a_2、a_3…… 隨て又展開の係數 c_1、c_2、c_3…… は其第一項に始まる或一定の週期を以て限りなく循環す。此循環の週期を組成せる項數 e は t^e-1 を b の倍數たらしむべき最小の正の整數、隨て e は分母 b のみによりて定まるべき、而して分子 a には關係なき數なり。

t が b と相素なるときは t^e-1 を b の倍數たらしむる如き指數 e の必ず存在すべきことは、上文の辨說の中間接に證明せられたる所なり。

t を 10 となすときは、上述の定理により 2 にても又 5 にても整除し得べからざる整數を分母とせる分數は必ず所謂純粹なる循環小數に等しきを知るべし。

一三の實例は必ずしも蛇足ならじ。

$b = 3$ 又は $b = 9$, $10 \equiv 1 \pmod{3} \pmod{9}$ $e = 1$

$$\frac{1}{3} = 0,333\cdots\cdots \qquad \frac{2}{3} = 0,666\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{9} = 0,111\cdots\cdots \quad \frac{2}{9} = 0,222\cdots\cdots \quad \frac{4}{9} = 0,444\cdots\cdots, \cdots\cdots$$

$b = 11$, $10^2 - 1 = 99 = 9 \times 11$. $e = 2$

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09} \qquad \frac{10}{11} = 0,\overline{90}$$

$$\frac{2}{11} = 0,\overline{18} \qquad \frac{9}{11} = 0,\overline{81}$$

$$\frac{3}{11} = 0,\overline{27} \qquad \frac{8}{11} = 0,\overline{72}$$

$$\frac{4}{11} = 0,\overline{36} \qquad \frac{7}{11} = 0,\overline{63}$$

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45} \qquad \frac{6}{11} = 0,\overline{54}$$

$$b = 13, \qquad 10^6 - 1 = 13 \times 76923, \qquad e = 6$$

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}\,, \qquad \frac{2}{13} = 0,\overline{153846}\,, \ldots\ldots$$

$$b = 37, \qquad 10^3 - 1 = 37 \times 27 \qquad e = 3$$

$$\frac{1}{37} = 0,\overline{027}\,, \qquad \frac{2}{37} = 0,\overline{054}\,, \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

こゝに横線は循環の週期を示せり。

分母が t と相素ならざる場合に於ては指數 l を適當に定めて

$$a t^{l} = \frac{a'}{b}$$

の分母を t と相素なるものとなし、而して後 a'/b を展開すべし。a の展開は a'/b の展開に於ける諸項を更に t^{l} にて除して之を得べし。此場合には循環は $t^{-(l+1)}$ の項に始まる、週期を組成せる項の數は前の場合に同じ。

例。

$$\frac{1}{12} \times 10^{2} = \frac{25}{3} = 8,333\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{12} = 0,08333\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{55} \times 10 = \frac{14}{11} = 1,2727\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{55} = 0,12727\cdots\cdots$$

u の展開式中整數の部分 g をも亦第二章(七)に說きたる如くにして t の冪に從て展開し、其展開の係數を表はすに負數の附標を以てするときは

$$u = \cdots\cdots c_{-2}t^2 + c_{-1}t + c_0 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots\cdots$$

を得、或は之を省畧して

$$u = (\cdots\cdots c_{-2}c_{-1}c_0,\, c_1c_2c_3\cdots\cdots)$$

と書く、こゝにコンマは t^0 の項の所在を表示せり。循環の週期を示すには或は横線を用ゐ、或は其兩端の係數に・を冠せしむべし。最後に注意すべきは展開の係數の中循環の週期に入らざる者ある場合、卽ち十進法に於ける所謂混循環小數の場合に於て、係數の循環の始まるは必ずし

も t の指數負なる項卽ち十進法に於ける小數點以下の或桁にはあらざることなり。例へば

$$\frac{100}{3} = 33,33\cdots\cdots$$

に於ては循環は既に整數部分より始まれり。一般に a/t の分母が t と相素にして分子 a が t の倍數なるとき必ず然り。斯の如き場合に於て整數部分に屬する循環の係數を度外に置きて强ひて循環は小數第一位に始まると規定するは、事實の眞相に背馳せりと謂ふべし。

(九)

分數の展開決して局を結ぶことなきときは、竟に其係數一定の週期を以て循環するに至るべきことをば既に知り得たり。是に至て自然に起らざるを得ざる疑問あり。曰く、若し豫め任意に係數の一週期を定むるとき、果して斯の如き展開を與ふべき分數存在し得べきや否や。分數を十進の小數に展開して循環小數を得べきことは之を知る、未だ知らず、凡ての考へ得べき循環小數は必

ずその起源を分數に有するや、否やを。

$\frac{a}{b}$ なる分數の展開が c_1, c_2 …… c_e なる係數の週期を與へたりとせば

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots\cdots + \frac{c_e}{t^e} + \frac{a}{bt^e}$$

なり。よりて

$$a(t^e - 1) = C, b$$

但

$$C = (c_1c_2\cdots\cdots c_e) = c_1t^{e-1} + c_2t^{e-2} + \cdots\cdots + c_e$$

即ち

$$\frac{a}{b} = \frac{C}{t^e-1}$$

是故に上文の疑問を解決せんと欲せば、豫め $c_1, c_2, \cdots\cdots c_e$ なる係數の週期を定め、さて C を上に書きたる如き整數となすとき

$$\frac{C}{t^e-1}$$

なる分數の展開が果して豫定の週期を有すべきや否やを確むれば則ち足る。

先づ

$$\frac{1}{t^e-1} - \frac{1}{t^e} = \frac{1}{(t^e-1)t^e}$$

なる容易に驗證せらるべき等式を立て、其兩邊に c を乘じて、少しく之を書き改め

$$\frac{c}{t^e-1}=\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\cdots\cdots+\frac{c_e}{t^e}+\frac{c}{(t^e-1)t^e}\qquad(1)$$

を得。記法を透明ならしめんが爲に更に

$$\frac{c}{t^e-1}=\frac{a}{b}$$

となして、上の等式を變形し

$$\frac{a}{b}=\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\cdots\cdots+\frac{c_e}{t^e}+\frac{a}{bt^e}\qquad(1^*)$$

となし之を前節の(1*)と比較するときは a/b の展開の係數が果して $c_1, c_2\cdots\cdots c_e$ を週期とせること一目瞭然なり。豫定の週期を以て循環する展開を與ふる分數は果して存在せり。

若し混循環小數の最一般なる形式を採りて

$$z=(\cdots\cdots a''a'a, c_1c_2\cdots\cdots c_e)$$

に於て……a''、a'、a は循環せざる係數、c_1、$c_2\cdots\cdots c_e$ は循環の週期而して循環の始ま

るは t^{k-1}（k は正又は負又は0）の項なりとなさば斯の如き展開を與ふべき分數 α は次の如くにして之を定むることを得。

前の如く

$$C=(c_1c_2\ldots\ldots c_e)=c_1t^{e-1}+c_2t^{e-2}+\ldots\ldots+c_e$$

となし、又循環せざる係數のみより作れる整數を A_1 と名づく、卽ち

$$A_1=(\ldots\ldots a''a'a)=\ldots\ldots+a''t^2+a't+a$$

しかするときは(1)によりて

$$\alpha t^{-k}=A_1+\frac{C}{t^e-1}$$

$$=\frac{(A_1t^e+C)-A_1}{t^e-1}$$

卽ち

さて A_1t^e+C は循環せざる係數及循環週期の係數より作りたる整數にして之を A と名づくれば

$$A=(\ldots\ldots a''a'ac_1c_2\ldots\ldots c_e)$$

$$=\ldots\ldots+a''t^{e+2}+a't^{e+1}+at^e+c_1t^{e-1}+\ldots\ldots+c_e$$

よりて

$$z = \frac{A - A'}{t^e - 1} \cdot t^k$$

例へば十進法に於て ($t = 10$)

$$z = 5.36\dot{7}0\dot{2}$$

循環は t^{-3} の項に始まる、$k - 1 = -3, \quad k = -2, \quad e = 3$

$$A = 536702, \quad A' = 536$$

$$z = \frac{536166}{99900} = \frac{9929}{1850}$$

又

$$z = 7\dot{5}04.\dot{9} = 7504.95049\ldots\ldots$$

$$k = 3, \; e = 4, \quad A = 75049, \quad A' = 7$$

$$z = \frac{75042000}{9999} = \frac{758000}{101}$$

先には(1)又は(1*)の形式より直に a/b の展開の係數が $c_1, c_2 \ldots\ldots c_e$ を週期とせるを論斷せり、然れども此結論は或る一つの點に於て少しく輕卒に過ぎたり。

上の等式が $\frac{a}{b}$ の展開式なるべきが爲には剩項が

$$\frac{\mu_n}{t^n} < \frac{1}{t^n}$$

なる條件を充實すべきを要す。即ち $\mu_n < 1$、$c_n < t-1$ なるべきを必須とす。c_1、c_2 …… c_n が盡く t より小なるべきは勿論なるが故に $c = c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \ldots\ldots + c_n$ は $t^n - 1$ より大なること決してこれなしと雖、若し $c = t^n - 1$ なるときは上述の條件は成立せず。

是故に例へば十進法に於て 0.999…… なる展開を與ふべき分數は存在せず。

若し展開の意義を少しく緩和して剩項 $\frac{\mu_n}{t^n}$ の充實すべき條件を

$$\frac{\mu_n}{t^n} \leqq \frac{1}{t^n}$$

となして、此處に等號の成立すべきを容さば、$c = t^n - 1$ なるとき即ち c_1、c_2 …… c_n 盡く $t-1$ に等しきとき

$$1 = \frac{t-1}{t} + \frac{t-1}{t^2} + \ldots\ldots + \frac{t-1}{t^n} + \frac{\mu_n}{t^n}, \quad \frac{\mu_n}{t^n} = \frac{1}{t^n}$$

一般に

$$\frac{1}{t^k} = \frac{t-1}{t^{k+1}} + \frac{t-1}{t^{k+2}} + \cdots\cdots + \frac{t-1}{t^n} + a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{t^n}$$

特に十進法に於て

$$1 = 0.999\cdots\cdots$$

の如き展開成立するに至るべし。然れども同時に一方に於て、展開の結果唯一なりとの法則は其汎通を失ふ、例へば十進法に於て

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{又は} \quad \frac{1}{2} = 0.4999\cdots\cdots$$

なるが如き是なり。

（十）

分數の展開を基礎として、整數論に關係せる、興味ある或る事實に到達することを得。

$\frac{a_1}{b}$ の分母 b が t と素なるとき、分子 a_1 を b より小にして b と素なる正の整數となし、$\frac{a_1}{b}$ の展開に於て逐次現出する剩餘 a_2、a_3……を定むる(八)の算式(1)を發足點となす。

$$a_1 t = e_1 b + a_2$$
$$a_2 t = e_2 b + a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_e t = e_e b + a_1$$

此處 a_1、a_2、a_3……a_e は皆 b より小にして且 b と相素なり。e は

$$t^e \equiv 1 \pmod{b}$$

を成立せしむべき最小の正の指數なり、隨て $e_{e+1} = e_1$ にして、此事實は既に上の算式に明記せられたり。

a_1、a_2、a_3……a_e は盡く相異なる數にして又盡く b より小に且 b と相素なるが故に其數 e は決して $\varphi(b)$ を超ゆることなきに注意すべし。

若し a_1 に代ふるに a_2 を以てし、$\frac{a_2}{b}$ の展開を得んが爲に、上の如き算式を立

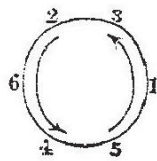
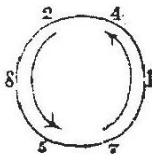
てたりとせば、此時逐次現出すべき剰餘は a_2、a_3、……a_e a_1 にして商は c_2、c_3……c_e、c_1 なるべきこと明白なり。又若し $\frac{a_3}{b}$ より發足せば、剰餘及商はそれぞれ a_3……a_e、a_1、a_2 及び c_3、……c_e、c_1、c_2 にして、一般に a_1、a_2……a_e の中の一つを a_h とせば $\frac{a_h}{b}$ より發足するとき逐次現出すべき剰餘は a_h、a_{h+1}……a_e、a_1……a_{h-1} にして、同一の e 數が同一の順序に、唯、其の起點を異にして、循環するを看るべし。例へば t を10、b を7、a_1 を1となすときは $10^e-1=7\times142857$、$e=6$ にして7を分母とせる分數の展開に於ける剰餘及係數の週期は次の如し。

$$
\begin{aligned}
1\cdot10 &= 1\cdot7+3\\
3\cdot10 &= 4\cdot7+2\\
2\cdot10 &= 2\cdot7+6\\
6\cdot10 &= 8\cdot7+4\\
4\cdot10 &= 5\cdot7+5\\
5\cdot10 &= 7\cdot7+1
\end{aligned}
$$

剰餘の週期

2　3　1　5　4　6

係數の週期

2　4　1　7　5　8

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{7} &= 0,142857\cdots\cdots\\
\tfrac{3}{7} &= 0,428571\cdots\cdots\\
\tfrac{2}{7} &= 0,285714\cdots\cdots\\
\tfrac{6}{7} &= 0,857142\cdots\cdots\\
\tfrac{4}{7} &= 0,571428\cdots\cdots\\
\tfrac{5}{7} &= 0,714285\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

若し $e=\varphi(b)$ なるときは

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ \cdots\cdots\ a_e \qquad (1)$$

は b より小にして b と素なる凡ての整數を網羅し、b を分母とせる既約分數の展開は斯の如くにして盡く求め得られたりといふべし。例へば $b=7$, $a=10$ なるとき $e=6=\varphi(7)$ なるが如きは此場合なり。

然れども若し $e<\varphi(b)$ なるときは(1)の e 數の外尚 b より小にして b と素なる數存在す、其一つを a'_1 と名づけ、$\frac{a'_1}{b}$ につきて前の如く剩餘の週期を求むれば、此週期を組成せる剩餘の數は前と同じく e なり。此等の剩餘を

$$a'_1,\ a'_2,\ a'_3,\ \dots\dots\ a'_e \qquad (2)$$

と名づくれば(2)の e 數は盡く相異なる、b より小にして b と素なる數なり。此等の數の中の一つ例へば a'_h より發足するときは同一の e 數(2)が同一の順序に、唯 a'_h を其起點として循環し來るべきこと前に同じ。

さて(2)に現はれたる e 個の數と(1)に現はれたる e 個の數との中に同一の數あることなし。げにも若し假に $a_h=a'_h$ なりとせば

$$a_h,\ a_{h+1},\ \dots\dots\ a_e,\ a_1,\ \dots\dots\ a_{h-1}$$

は同一の e 數ならざるを得ず、隨て a_1' が既に(1)の中に存在せりといふ矛盾

$$a_k',\ a_{k+1}',\ \ldots\ldots\ a_e',\ \ldots\ldots\ a_{k-1}'$$

の結果に陷るべきなり。

是故に b より小にして b と素なる數 e 個よりも多からば、斯の如き數は少くとも $2e$ 個なかるべからざるを知る。卽ち若し $\phi(b)>e$ ならば必ず $\phi(b)\geqq 2e$ なり。

若し $\phi(b)=2e$ ならばよし、さらずば(1)(2)の外尚 b より小にして b と素なる整數必ずこれあり、其一つを a_1'' と名づけ、a_1'' より發足して前の如く新に

$$a_1'',\ a_2'',\ a_3'',\ \ldots\ldots\ a_e'' \qquad (3)$$

なる(1)にも(2)にも含まれざる e 個の數を得。$\phi(b)$ 若し $2e$ より大ならば、少くとも $3e$ を下らざるを知る。

次第に斯の如くなし行きて竟に b より小にして b と素なる $\phi(b)$ 個の整數を(1)、(2)、(3)……の如き e 個づゝの幾組かに分つことを得。今(1)、(2)、(3)……(f) に至り

て $\varphi(b)$ 個の數を網羅し得たりとせば

$$\varphi(b)=ef \qquad (一)$$

例へば $t=10,\ b=13,\ \varphi(13)=12.$ e 及逐次の剩餘、係數を求めんが爲め、先づ1の右に未定數の0を附加せる數を實とし、之を13にて除す。（こは前に7の場合になせる算法を約めたるに過ぎず）

```
        076923
13 | 1000000
      91
      --
       90
       78
       --
       120
       117
       ---
         30
         26
         --
          40
          39
          --
           1
```

```
        153846
13 | 2000000
     13
     --
      70
      65
      --
       50
       39
       --
       110
       104
       ---
         60
         52
         --
          80
          78
          --
           2
```

除して第六段に至り剩餘1を得たるは 10^6-1 の始めて13の倍數なるを示す。

故に $e=6$ にして、1より發足して得らるべき逐次の剩餘は

$$1,\ 10,\ 9,\ 12,\ 3,\ 4 \qquad (二)$$

の六個を週期とす。其數未だ $\varphi(13)$ 個に充たざるが故に、此中になき數の一つ2を採り、前と同様にして

$$2,\quad 7,\quad 5,\quad 11,\quad 6,\quad 8, \qquad |2|$$

を得。斯くして得たる六個づゝ二組の數は恰も $\varphi(13) = 12$ 個の 13 より小にして之と素なる數を盡せり。

$$\varphi(13) = 6 \times 2, \qquad f = 2.$$

此計算によりて同時に 13 を分母とせる、凡ての既約眞分數の展開を得たり。

$$\frac{1}{13} = 0.076923\ldots\ldots \qquad \frac{2}{13} = 0.153846\ldots\ldots$$

$$\frac{10}{13} = 0.769230\ldots\ldots \qquad \frac{7}{13} = 0.538461\ldots\ldots$$

$$\frac{9}{13} = 0.692307\ldots\ldots \qquad \frac{5}{13} = 0.384615\ldots\ldots$$

$$\frac{12}{13} = 0.923076\ldots\ldots \qquad \frac{11}{13} = 0.846153\ldots\ldots$$

$$\frac{3}{13} = 0.230769\ldots\ldots \qquad \frac{6}{13} = 0.461538\ldots$$

$$\frac{4}{13} = 0.307692\ldots\ldots \qquad \frac{8}{13} = 0.615384\ldots\ldots$$

又 $b = 39, \quad \varphi(39) = 24, \quad e = 6, \quad f = 4.$

此場合に於ける四組 ($f = 4$) の剩餘は

1,	10,	22,	25,	16,	4,	[1]
2,	20,	5,	11,	32,	8,	[2]
7,	31,	37,	19,	34,	28,	[3]
14,	23,	35,	38,	29,	17,	[4]

にして此の表は實際39より小にして之と素なる凡ての數を網羅せり。此等四組に屬せる係數の週期は

$\frac{1}{39}$ 025641

$\frac{2}{39}$ 051282

$\frac{7}{39}$ 179487

$\frac{14}{39}$ 358974

なり。

分數の展開にことよせて導き出したる等式(1)は、其自身には分數の展開に何等の關係なき、整數論上の一事實を表明せり。之を獨立に言明して次の定理を

得。

整數 b が t と素なるときは t^e-1 を b の倍數となすべき最小の正指數 e は $\varphi(b)$ の約數なり。

是故に前の如く $\varphi(b)=ef$ と置きて

$$t^e \equiv 1 \pmod{b}$$

の兩節を指數 f の冪に揚げて(第四章(一)を看よ) $t^{ef} \equiv 1 \pmod{b}$ 卽ち

$$t^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b} \qquad (2)$$

を得。特に b に代ふるに t の約數ならざる素數 p を以てするときは、$\varphi(p)=p-1$ なるが故に、

$$t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (3)$$

を得。(3) は t が素數 p の倍數ならざるときは、$t^{p-1}-1$ は p の倍數なるべきを示せり。是れ卽ち有名なるフェルマーの定理なり。(2) は法が素數なるべしとの條件を撤去して得たる、此定理の擴張にして、オイラーの發見に係る。

例。

$$p = 7,\ t = 10,\ 10^6 - 1 = 7 \times 142857$$

$$p = 13,\ t = 10,\ 10^{12} - 1 = 13 \times 76923076923$$

$$b = 21,\ t = 10,\ \varphi(21) = 12.$$

$$10^{12} - 1 = 21 \times 47619047619$$

$$p = 3,\ t = 7,\ 7^2 - 1 = 3 \times 16$$

$$p = 5,\ t = 3,\ 3^4 - 1 = 5 \times 16$$

$$b = 15,\ t = 2,\ \varphi(15) = 8$$

$$2^8 - 1 = 15 \times 17.$$

オイラーの定理は更に之を補修することを得。b を素數冪に分解して

$$b = p^\alpha q^\beta r^\gamma \cdots\cdots$$

となし

$$P = \varphi(p^\alpha),\quad Q = \varphi(q^\beta),\quad R = \varphi(r^\gamma),\ \cdots\cdots$$

と置けば

$$\varphi(b) = P.\,Q.\,R\ \cdots\cdots$$

さてtとbと素なるときは(2)によりて

$$t^{P} \equiv 1 \quad mod.\,p^{\alpha},\quad t^{Q} \equiv 1 \quad mod.\,q^{\beta},\quad t^{R} \equiv 1 \quad mod.\,r^{\gamma}\cdots\cdots$$

今P、Q、R……の最小公倍数をMと名づくれば

$$t^{M} \equiv 1 \quad mod.\,p^{\alpha},\quad mod.\,q^{\beta},\quad mod.\,r^{\gamma}\cdots\cdots$$

即ち$t^{M}-1$はp^{α}、q^{β}、r^{γ}……のいづれにても整除し得べし。是故に$t^{M}-1$はp^{α}、q^{β}、r^{γ}……の最小公倍数なるbにても亦整除せらるべく、結局$\varphi(b)$に代ふるにMを以てして既に

$$t^{M} \equiv 1 \quad (mod\ b) \qquad (4)$$

例。

$$b = 21 = 3.\,7$$

$$P = 2,\quad Q = 6;\qquad M = 6 \qquad\qquad t^{6} \equiv 1 \quad (mod.\,21)$$

$$2^6-1=21\times3$$
$$5^6-1=21\times744$$
$$10^6-1=21\times47619$$

$M=4$　　　$t^4\equiv1\ (mod\ 15)$

$$2^4-1=15$$
$$4^4-1=15\times17$$
$$7^4-1=15\times160$$

$b=15=3.5$

$P=2,\quad Q=4;$

(十一)

十進法に於ける小數四則の演算につきて此處に尚數言を費さんとす。勿論ここに説く所は命數法の基數が十にあらざる場合にも適用し得らるべし。

小數に展開せられたる分數を書き表はす爲に、加法の記號及び t^n なる數を省略して、單に係數を順次に幷記し、コンマを以て t^n の位の在る所を示すべき

ことは既に言へり。此常用の小數記法を用ゐて一般に或數を表はすには係數を同一の文字にて示し、係數の屬する t の冪の指數を此文字に附記して、以て此係數の位を表はすを便なりとす。例へば

$$c_3t^3+c_2t^2+c_1t+c_0+c_{-1}t^{-1}+c_{-2}t^{-2}$$

或は之を約めて

$$(c_3c_2c_1c_0c_{-1}c_{-2})$$

と記するが如き是なり。小數點の所在を明示すること却て不便なる場合には、此記法は特に便利なり。括弧は此記法と積の記法とを區別せんが爲に特に用ゐたり。此兩樣の記法の混亂する處なしと認むべき場合には、括弧をも省略することあるべし。例へば單に a_na_{n-1} と記せるは $a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}$ を表はす、n 若し1ならば a_n は十の位の係數、n 若し0ならば a_n は一の位の係數にして、又若し n を -2 なりとせば a_n は 10^{-2} 卽ち小數第二位の係數を表はせるものとす。個個の係數が $t-1=9$ を超えざる正の整數(又は0)なることは言ふを須ひず。

さて一般に

$$g^{n+1} \geqq (c_n c_{n-1} c_{n-2}\cdots\cdots) \geqq c_n g^n$$

げにも中間に書ける數の最大なるは c_n、c_{n-1}……が盡く9にして、且數字が限りなく連續せる場合にして、此場合に於てのみ中間の數は g^{n+1} に等しきを得べし、又此數の最小なるは c_n の外凡ての係數盡く0なる場合にして、此場合に限り此數は $c_n g^n$ に等しきを得。

又

$$c_n c_{n-1}\cdots\cdots c_k c_{k-1}\cdots\cdots \quad (n > k)$$

は $c_n c_{n-1}\cdots c_k$ より小ならず、而も兩者の差は g^k を超ゆることなし。

是によりて

$$r = c_n c_{n-1}\cdots\cdots,\quad r' = c'_m c'_{m-1}\cdots\cdots$$

の如き二數の大小を比較せんとせば先 r、r' の左端の數字の位の高低を比較すべし、n 若し m より大ならば（例へば $n=-2, m=-3$ の如く）r は r' より

大なり。n 若し m に等しからば、左端の係數を比較すべし、c_n 若し c'_n より大ならば r は r' より大なり。若し $c_n = c'_n$ ならば、次位の係數を比較すべし、一般に $c_n = c'_n$, $c_{n-1} = c'_{n-1}$, …… $c_h \neq c'_h$ 即ち h の位に於て始て相異なる係數に遇はゞ、此等の係數の大小は r、r' の大小を決定す。但し $c_h = c'_h + 1$ なるとき r に於ては c_{h-1}, c_{h-2} ……等 c_h に繼げる係數盡く0にして r' に於ては c'_{h-1}, c'_{h-2} ……等無限に連りて且盡く9なるときは r、r' は相等し。

$$r = \cdots\cdots c_{h+1}\, c_h$$
$$r' = \cdots\cdots c'_{h+1}\, c'_h$$

小數の加減乘除は畢竟整數の四則に歸着す。先づ或小數に、$10^k (k>0)$ を乘ぜんと欲せば、其數字を變ずることなくして、唯小數點を k 位左に移すべく、又 10^k を以て除するには小數點を k 位右に移すべし。勿論其必要あるときは數字の列の左端又は右端に若干の0を添ふるの注意肝要なり。

二つの有限の小數

の和又は差を求めんと欲せば先づ h、k の中小なる方を採り、例へば $h \geqq k$ となして、10^{-k} を r、r' に乘じて

$$r.10^{-k} = C = \ldots\ldots c_{h+1}\,c_h\,00\ldots\ldots$$

$$r'.10^{-k} = C' = \ldots\ldots\ldots\ldots c'_{k+1}\,c'_k$$

なる二個の整數を得、C C' の和又は差を計算して後之に 10^k を乘ずべし

$$r \pm r' = (C \pm C')\,10^k$$

例。

$$r = 7.0128 \qquad r' = 0.936572 \qquad h = -4,\ k = -6$$

$$r + r' = (7012800 + 936572) \times 10^{-6}$$

或は約めて

```
 7.0128
 0.936572
─────────
 7.949372
```

r、r' の一方又は雙方が循環小數なる場合に於ても加法減法は簡單なり。今 r、r' が共に循環小數なる場合に於て、先 r、r' の中循環の後れて始まるものの t の位

よりすとなし、循環週期に屬する數字の中 t^k の位に先てるものをば循環せざる部分に編入し、次に r, r' の循環週期の位數 e, e' の最小公倍數を m とし $m = \mu e = \mu' e'$ となし、r にありては週期 μ 回、r' にありては週期 μ' 回を列記して、雙方共に形式上同位 t^k に始まれる、同位數 m の週期を有せる循環小數となす。さて r, r' に於ける t^k の位以上の係數を其儘とりて作りたる整數を A, A'、又 t^k より t^{k+m} に至る延長週期の係數より作りたる整數を C, C' と名づく。r, r' の形式次の如し。

$$r = (ACC\ldots\ldots) = \left(A + \frac{C}{t^m - 1}\right)_{t^{k+1}}$$

$$r' = (A'C'C'\ldots\ldots) = \left(A' + \frac{C'}{t^m - 1}\right)_{t^{k+1}}$$

r, r' の和を計算するに先 C, C' の和を求むべし、C, C' はいづれも m 位の整數なり其和もし t^m より小ならば、是直に $r + r'$ の循環週期なり。$C + C'$ 若し t^m に達せば $C + C' = t^m + s$ となすとき s は m 位の整數にして

$$\frac{C}{t^m - 1} + \frac{C'}{t^m - 1} = 1 + \frac{s + 1}{t^m - 1}$$

よりて $n+1$ は卽ち $r+r'$ の循環週期なり。$n+1$ は決して t^n に達することを得ず。

和の數字の中循環の週期に入らざるものは前後二つの場合に於て、それぞれ $A+A'$ 及 $A+A'+1$ なる整數によりて與へらる。

$$r+r'=\left\{(A+A')+\frac{C+C'}{t^n-1}\right\}t^{k+1}$$

又は

$$=\left\{(A+A'+1)+\frac{S+1}{t^n-1}\right\}t^{k+1}$$

$r-r'$ を求むるに亦二樣の場合を區別すべし。先づ $C\geqq C'$ ならば

$$r-r'=\left\{(A-A')+\frac{C-C'}{t^n-1}\right\}t^{k+1}$$

次に $C<C'$ ならば $t^n+C-C'=D$ と置きて

$$r-r'=\left\{(A-A'-1)+\frac{D-1}{t^n-1}\right\}t^{k+1}$$

卽ち後の場合に於ては $r-r'$ の週期は $D-1$ 循環せざる部分は $A-A'-1$ に

よりて與へらるゝなり。

例。

$\frac{17}{70} = 0,2\overline{428571}$

$\frac{3}{11} = 0,2\overline{727272}$　　$k = 2, m = 6$

$\frac{17}{70} + \frac{3}{11} = \frac{397}{770} = 0.5\overline{155844}$

$A = 2, \quad C = 428571$

$A' = 2, \quad C' = 727272$　　$S = 155843$

$\frac{8}{7} = 1,\overline{142857}$

$\frac{2}{11} = 0,\overline{181818}$　　$k = -1, m = 6$

$\frac{8}{7} - \frac{2}{11} = \frac{74}{77} = 0,\overline{961038}$

$A = 1, \quad C = 142857$

$A' = 0, \quad C' = 181818$　　$D = 961039$

(十二)

乘法を說くに當り、先づ r、r' 共に有限の小數なる場合より始めん。

$$r = \cdots\cdots\cdots c_{h+1}\, c_h$$

$$r' = \cdots\cdots\cdots c'_{k+1}\, c'_k$$

の積を計算するには $r\,10^{-h} = C$, $r'\,10^{-k} = C'$ なる整數の積を求めて後之を 10^{-h-k} にて除すべし。r、r' に於ける小數部分の位數 h、k にして、積のは $h + k$ なり。

r が循環小數にして r' が有限の小數なるときは、r の循環週期は e 位より成り t^{k} の位より始まるとなし、A、C をば例の如き意義に用ゐて

$$r = \left\{A + \frac{C}{t^e - 1}\right\} t^{h+1}$$

とし、又

$$r' = A' t^{h}$$

と置く。さて

$$r r' = \left\{A A' + \frac{A' C}{t^e - 1}\right\} t^{h+k+1}$$

若し $A'C \leqq t^e - 1$ ならば、$A'C$ は直に rr' の週期を與へ、循環は t^{h+k} の位に始まり、週期は e 位より成る。AA' は循環せざる部分の數字を與ふ。然れども若 $A'C$

にして t^e-1 より大ならば $A'C$ を t^e-1 にて除し、商 △ 及剩餘 P を求むべし

$$A'C = \triangle(t^e-1)+P, \qquad t^e-1 > p \geqq 0$$

しかするときは

$$\gamma\gamma' = \left\{AA' + \triangle + \frac{P}{t^e-1}\right\} t^{h+k+1}$$

にして P は循環の週期、$AA'+\triangle$ は循環せざる部分の數字を與ふ。循環の始まる位及其週期の位數は前に同じ。こゝに t^e-1 を法としての除法は第四章(二)を適用して其計算を短縮することを得

例。

$$\gamma = 0{,}63 \qquad k = -1,\ e = 2$$

$$\gamma' = 7{,}3869 \qquad h = -4$$

$$A = 0, \quad C = 63, \quad C' = 73869$$

$$A'C = 4653747 = 47007 \times 99 + 54$$

$$\gamma\gamma' = 4{,}7007\overline{54}$$

この例に於て99を法とせる除法の商及剩餘を計算するに次の如くなすことを得

$$\begin{array}{ll}
\overline{4653747} & \\
a\ b\ c\ d & \\
46537\ldots\ldots(abc) & 47\ldots\ldots d \\
465\ldots\ldots(ab) & 37\ldots\ldots c \\
4\ldots\ldots a & 65\ldots\ldots b \\
\overline{47006\ldots\ldots} & 4\ldots\ldots a \\
1\ldots\ldots \lambda & \overline{153}\ldots\ldots a+b+c+d=100\lambda+R-\lambda \\
\overline{47997\ldots\ldots}\ \triangle & 1\ldots\ldots \lambda \\
 & \overline{54}\ldots\ldots R
\end{array}$$

r' の位數甚小なる場合の外、斯の如き計算の方法は實用に適せず。況や r、r' 共に循環小數なる場合に於ては、分數の計算を經由して、最後の結果するを寧ろ簡便とすべし。

r、r' が有限の小數なると循環小數なるとには關係なく、一般に r、r' の最高位がそれぞれ t^m、t^n の位なるときは rr' の最高位は t^{m+n} 又は t^{m+n+1} の位なるべし。勿論こゝに指數 m、n は正又は負の整數又は0なることを得べし。

此事實によりて又 r、r' の商の最高位を決定することを得。r、r' の最高位の指數は前の如く m、n なりとせば $m=n$ なる商の最高位の指數は $m-n$ 又は $m-n-1$ なり。此二つの場合を區別せんと欲せば、r、r' の數字を左端より觀察すべし。最一般なる場合を採りて r、r' の數字左端 e 位は全く同一にして、左端より第 $e+1$ 位に至り、始めて相異なる數字に遭遇すとなさば r、r' の形式は次の如し

$$r = Pe\ldots\ldots$$
$$r' = Pe'\ldots\ldots$$

こゝに P は r 及び r' の左端に於て相一致せる e 位の數字を代表し、e、e' は相異なる數字なり、さて e の e' より大なると小なるとに隨ひて、商の最高位の指數は $m-n$ 又は $m-n-1$ なり。

勿論こゝに言へる事は r、又は r' が $999\ldots\ldots$ の如く9を週期とせる循環小數の形に與へられたる場合には、相當の制限の下にのみ成立し得べし。されども

之に關せる縷說は無用なるべし。

r、r'が共に有限の小數なる場合には、r、r'の雙方に適當なるtの同一の冪を乘じて之を整數A、A'に變形するとき、$r:r'$を定むるは$\frac{A}{A'}$なる分數の展開に歸すべし。實際に於て此計算を行ふには、rの數字の右端に任意數の0を添へ、之を實となし、r'の小數點を去りて作りたる整數を法として、商の數字の竟に循環するに至るまで除法を繼續し、さて商の位取りをなすには、例へば上に述べたる最高位決定の方法によることを得。

rは循環小數にしてr'は有限の小數なる場合にはrの循環週期を限りなく反復して書き、前の如くにして商の數字の循環するに至るまで除法を繼續すべし。

r'が循環小數なるときは、分數を經由して最後の結果に到達するを良しとす。

例。　$r = 0.0333……$　　$r' = 0,7$

7)333333……
　47619……

$$m = -2,\quad n = -1\quad P = 0,\quad c = 3,\quad c' = 7;\quad m - n - 1 = -2$$

$$r : r' = 0,\overline{047619}$$

小數の計算につきてこゝに說きたる事は簡易なり。然れども小數計算は甚だ侮り難き問題なり。理論的の見地より之を觀察して、週期及其位數等に重きを置かば、其解決には整數論の知識を要すること必ずしも少小ならず。ガウスが其「整數論」の一節を特に循環小數の理論に割ける、以て鑑とすべし。

實用に於ては小數の計算は結果の近似値卽ち其最高位若干を決定するを主眼とす。卽ち問題の要點は如何にして正しき結果に到達すべきかといふにあらずして、成るべく簡短なる方法によりて、成るべく正確なる結果を獲んとするにあり。問題の困難は此「成るべく」の一語より起る。

第七章　四則算法の形式上不易

有理數、算法の形式上不易、問題の說明○順及逆の算法、其關係○減法の汎通及負數、正

負整數の乘法○除法の汎通と分數、有理數四則、除法の例外○有理數の大小

（一）

吾輩は自然數の觀念より發足し、順序又は大小の思想に準據して負數及分數を導き出だせり。正負の整數分數を總括して之を有理數といふ。さて自然數を基礎として竟に有理數に到達するに、尙一の徑行あり。自然數の範圍内に於ては加法は常に可能なれども、其逆なる減法は則ち然らず、減法をして無制限に可能ならしめんと欲せば、負數をも併せ考ふるを避くべからず。正負整數の範圍内にありては、加法減法は之を凡ての場合に施こして誤る所なきのみならず、加法減法は其眞髓に於て同一の算法に歸着す。正負整數の範圍内に於て常に可能なる、第二の算法は乘法なり、而も其逆なる除法は其可能の區域に於て羈絆せらるゝ所あり。此羈絆を脫せんと欲せば分數を導入することを止むべからざる所にして、整數、分數を總括せる有理數は四則算法の汎通に於て制縛せらるゝ所なき一系統を成せり。以上の觀察は算法汎通の要求を以て數の範圍

を擴張するの動因となし得べきを示す。此見地は亦近世數學に於て重要なる地歩を占むるものにして、ハンケルは之を算法の形式上不易と名づけたり。然れども算法の形式上不易の原則を基礎として數の範圍を擴張せんとするときは、其擴張の區域に自ら制限あることを忘るべからず。自然數より有理數に到達するは此原則を適用すべき最自然的なる場合なり。又此法則を出來得べき限り利用し盡して所謂「代數的の數」に到達することを得れども、一般の無理數の觀念を定めんと欲せば、既に此原則以外に或立脚點を求むるの必要に遭遇すべし。そは兎も角もあれ、吾人は今此學說の梗概を迅速に通觀せんと欲す。

此章に於ける研究は分析的なり、新なる知識を獲るを主眼とせずして、既知の事實を新見地より觀察せんとするなり。則ち自然數の觀念は既に定まれりとなせども、負數及分數は、論理の表面上、吾人の未だ知らざる所の者と見做し、さて新しき方法によりて自然數の觀念より分數及負數のそれを導き出さんと

す。是卽ち吾人の立脚點なり。

吾人は自然數に關して次の事實を知れり。

原則一。二つの數は相等しきか或は相等しからざるか何れか一なり。甲は乙に等しく又丙にも等しからば、乙は丙に等し。

數に加法及乘法を施すことを得。此等の算法は次の諸性質を具へたり。

原則二。結果の一定せること。a、bが與へられたるときは$a+b=c$又は$ab=c$なる第三の數cは一定の數なり。$a=a'$, $b=b'$ならば$a+b=a'+b'$; $ab=a'b'$.

原則三。轉倒の結果一定せること。a、bの與へられたるとき、$b+c=a$又は$bc=a$なる條件を充實すべき數cは、若し存在すとも、必唯一個に限るべし。

$b+c=a$, $b+c'=a$より又$bc=a$, $bc'=a$より$c=c'$を得。

原則四。組み合せの法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$,　$(ab)c=a(bc)$.

原則五。交換の法則　$a+b=b+a$,　$ab=ba$

原則六。分配の法則　$(a+b)c=ac+bc$

加法及乘法の轉倒卽減法及除法は自然數の範圍內に於て必しも可能ならず。原則三は轉倒の可能なる場合に於ては其結果唯一なるべきを言へるに過ぎず。」

此制限を除かんと欲せば數の範圍を擴張して自然數以外新種の數を作り出さざるを得ず。是に於て一個の問題を生ず、自然數の範圍を擴張して減法及除法を汎通ならしめ、而も數の新範圍に於て上述の諸原則を盡く成立せしめんとすといふこと是なり。此問題は二樣の要求を含めり。其一は減法及除法を汎通ならしめんが爲に新しき數を作らんとするにあり。此要求は甚空漠にして寬大なり。之に應ずるに於て吾人は何等の羈絆をも受くることなし。aがbより小なる場合に於ける$a-b$又はaがbの倍數ならざる場合に於ける$a:b$は吾人の意に任じて其意義を定め、形式上減法及除法を汎通ならしむることを得。然れども斯の如く全く隨意に減法除法の結果を定むることの效益果して如何。

算法適用の區域に制限あるは自然なり。強て此制限を撤去せんとする動因は

一は以て理論の統一を保ち、一は依りて數の應用の區域を擴大せんとするにあり。數の觀念を擴張して作り得たる新範圍に統一なくば、是或種の算法の汎通を贏け得んが爲に、其他の諸法則の汎通を犧牲とせるなり。其弊や算法に自然的の制限あるに讓らず。統一せる法則に遵はざる數は何處にか其應用を求めん。是に於て更に第二の要求を生ず。減法除法を汎通ならしめんが爲に作り成せる數の新範圍に於て、自然數につきて上に述べたる諸原則仍成立すべしとの條件、卽是なり。此要求は過大にして苛酷なり。上述の諸原則犯すへからずとせば、a の b より大ならざる場合に於ける $a-b$ 及 a の b の倍數ならざる場合に於ける $a:b$ の意義は自ら定まり、此間復た隨意選擇の餘地あることなし。さて斯の如くにして新しき數の相等及加法、乘法の意義定まれる上、仍此既定の意義の決して自然數の諸原則に悖らざるを欲す。此點に於て第二の要求は過大なり。是故に此要求は果して貫徹せらるべきや否やは豫め測るべからずして其決定は精細なる調査に待つ所あり。

事實につきて之を言ふ、若し除法の汎通に唯一の除外例（0を法とせる除法）あるを容すとの讓步をなすときは、此要求は全く貫徹せられ得べきこと、後條に至て自ら明なるべし。

（二）

加法及乘法を順の算法とし、減法及除法を逆の算法となす。加法減法及乘法除法につきて同趣の說明を反復するの煩を避けんが爲に、此一節に於ては兩者を一括し、＋ × に代ふるに ○ 又 － ： に代ふるに ＊ を以てすべし。或は一般に ○ ＊ は次に掲ぐる諸性質を具へたる一種の算法及其逆の算法を表せりとするも亦可なり、○ ＊ は例へば之を合、離と訓むべし。

合、離の算法は之を自然數に適用する限り次の諸條件を充實す。

一、a、b の與へられたるとき $a \circ b = c$ なる數 c は必、しかも唯一個に限り、存在す。

$a = a'$, $b = b'$ より $a \circ b = a' \circ b'$ を得。

二、a、b の與へられたるとき $b \circ c = a$ なる條件を充實すべき數 c は、若し存在すとも、唯一個に限る。此數を表はすに $c = a * b$ なる記法を用ゐる。よりて

$$b \circ c = a \text{ と } c = a * b$$

とは同一の事實を表はし、又 $a = a'$, $b = b'$ より $a * b = a' * b'$ を得。

三、

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

四、

$$a \circ b = b \circ a$$

$a * b$ なる記號に本來の意義ある場合と、然らざる場合とあり。本來の意義なきは卽離の算法不可能なる場合にして、此場合には $a * b$ は卽新に作らるべき一つの數を表はせり。さて斯くして新に作らるべき數は盡く一、二、三、四の條件を充實すべきを要し、且斯の如き新數の作られたる上は離の算法恒に可能なるを要するが故に、先づ二を改めて次の如くなす。

二* a、b の與へられたるときは $b \circ c = a$ なる條件に適すべき（本來の、或は新しき）數 c は必ず而も唯一個に限りて、存在す。之を表はすに $c = a * b$ なる記

法を用ゐる。即ち次の二つの關係は必ず相隨件す。

$$c = a * b,\quad b \circ c = a$$

一、二*、三、四の論理上必然の結果として次の諸定理を得。

五、$a * b = a' * b'$ と $a \circ b' = a' \circ b$ とは相隨件す。

二*によりて $(a * b) \circ b = a,\ (a' * b') \circ b' = a'$ よりて一により

$$(a * b) \circ b \circ a' = a \circ a'$$

$$(a' * b') \circ b' \circ a = a' \circ a$$

三、四を用ゐて此兩式より

$$(a * b) \circ (b \circ a') = (a' * b') \circ (b' \circ a)$$

を得、これより二*及四を用ゐて $a * b = a' * b'$ と $a \circ b' = a' \circ b$ との必相隨件すべきを知る。

五は一、二*、三、四の論理上必至の結果なり。a、b は本來の數にして且 $a * b$ が可能なるときは即ち $a * b$ が本來の數に等しきときは、五は本來の數に關せ

る當然の結果なり。若し $a*b$ が本來の數の範圍内にて可能ならずば、$a'*b'$ は卽ち新なる數にして五は畢竟 $a*b$, $a'*b'$ なる二つの新なる數の相等しといふことに賦すべき意義を與ふるに過ぎず。一乃至四の原則を犯すべからずとなさば、二つの新なる數の相等は斯く解釋するの外途なきなり。

六、$(a*b)\circ(a'*b') = (a\circ a')*(b\circ b')$

記法を簡約せん爲 $\mu = a*b$, $\mu' = a'*b'$, $\mu'' = \mu\circ\mu'$ と置く。さて三、四によりて $\mu''\circ(b\circ b') = (\mu\circ b)\circ(\mu'\circ b')$ 二[*]によりて $= a\circ a'$ よりて二[*]により

$$\mu'' = \mu\circ\mu' = (a\circ a')*(b\circ b')$$

μ, μ' が共に本來の數ならば此定理は當然成立す。μ, μ' の中少くとも一つが新なる數なるときは μ, μ' に合の算法を施せる結果は斯の如く定めざるを得ず。五及六によりて新らしき數の相等及び新らしき數の關係せる合の算法の意義全く定まれり。

さて斯の如くにして定まれる相等及び合の算法は果してよく吾人の要求に合

へりや否や。之を審査するに當り先づ次の事實より始めんとす。

七、$\mu = a * b,\ \mu' = a' * b',\ \mu'' = a'' * b''$ となすとき、五に從ひて $\mu = \mu',\ \mu = \mu''$ ならば必ず、又 $\mu' = \mu''$ なり。

げにも $\mu = \mu',\ \mu = \mu''$ より五によりて $a' \circ b = a \circ b',\ a \circ b'' = a'' \circ b$ を得、一、二、三、を本來の數 a, a', a'', b, b', b''、に適用して $(a' \circ b'') \circ (a \circ b) = a'' \circ b' \circ (a \circ b)$ を得更に二によりて $a' \circ b'' = a'' \circ b'$ 卽ち五に從ひて $\mu' = \mu''$

さて一を驗證せんが爲に $\mu = a * b,\ \mu' = a' * b',\ \nu = c * d,\ \nu' = c' * d'$ と置き $\mu = \mu',\ \nu = \nu'$ より $\mu \circ \nu = \mu' \circ \nu'$ を得んとす。先づ

$$\mu \circ \nu = (a \circ c) * (b \circ d); \qquad \mu' \circ \nu' = (a' \circ c') * (b' \circ d')$$

よりて $\mu \circ \nu = \mu' \circ \nu'$ は五によりて $(a \circ c) \circ (b' \circ d') = (a' \circ c') \circ (b \circ d)$ に歸す。而も此等式は $\mu = \mu',\ \nu = \nu'$ より得べき $a \circ b' = a' \circ b,\ c \circ d' = c' \circ d$ によりて保證せられたり。

組み合はせの法則は $(a * b) \circ (a' * b') \circ (a'' * b'') = (a \circ a' \circ a'') * (b \circ b' \circ b'')$

によりて直に本來の數の場合に歸着す。交換の法則も亦同じ。

新しき數の關係せる合の算法につきて、尙見逃すべからざる問題あり。先に二*に於て本來の數 b と新なる數 $\mathfrak{a}*\mathfrak{b}$ とに合の算法を施せる結果は a なるべしと定め、又一方に於て一般に本來の數及新らしき數に關する合の算法の意義を定めたり。此兩樣の意義は b と $\mathfrak{a}*\mathfrak{b}$ とに適用せられて撞着を惹き起すことなきや否や。卽ち六に於て $\mathfrak{a}'*\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}$ となすとき六の右邊は果して a に等しきを得べきや、否やを驗せざるべからず。$\mathfrak{a}'*\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}$ より $\mathfrak{a}'=\mathfrak{b}\circ\mathfrak{b}'$ を得、六の右邊は $(\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}\circ\mathfrak{b}')*(\mathfrak{b}\circ\mathfrak{b}')$ を與ふ、此離の算法は可能にして其結果は a に等し。

八、本來の數と新定の數とを總括せる新範圍にありては、離の算法は汎通にして、次の式の示すが如き唯一の結果を與ふ。

$\mathfrak{c}=\mathfrak{a}*\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}'=\mathfrak{a}'*\mathfrak{b}'$ ならば $\mathfrak{c}*\mathfrak{c}'=(\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}')*(\mathfrak{a}'\circ\mathfrak{b})$

げにも六によりて $\{(\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}')*(\mathfrak{a}'\circ\mathfrak{b})\}\circ\mathfrak{c}'=(\mathfrak{a}\circ\mathfrak{b}'\circ\mathfrak{a}')*(\mathfrak{a}'\circ\mathfrak{b}\circ\mathfrak{b}')$ にして

右邊に立てる數の μ に等しきことは $a\circ b'\circ a'\circ b = a'\circ b\circ b'\circ a$ なる明白なる等式の明示する所なり。又逆に $b*b' = c*a$ と置かば $b'\circ(c*a) = b$ より

$$(a'\circ c)*(b'\circ a) = a*b$$

を得、これより五によりて $a'\circ c\circ b = a\circ b'\circ a$ 又は $(a'\circ a)\circ c = (a\circ b')\circ a$ を得、$c*a$ は上に掲げたる $b*b'$ の式に外ならざるを確むべし。

以上の觀察により本來の數の外尚 $a*c$ の如き新らしき數を作り、其相等及合の算法の意義を五、六によりて定むるときは、數の新範圍に於て一乃至四の原則は依然成立し且、離の算法は凡ての場合に可能なるべきを知り得たり。

α を任意の一數となすときは八によりて

$$\alpha\circ\varepsilon = \alpha$$

なる條件を充實すべき數 ε 必存在す、さて β を如何なる數となすとも

$$(\beta*\alpha)\circ\alpha\circ\varepsilon = (\beta*\alpha)\circ\alpha$$

即ち

$$\beta \circ \varepsilon = \beta$$

なるが故に、ε なる數は α には關係なき一定の數なり。即ち β を如何なる數となすとも

$$\varepsilon = \beta * \beta$$

斯の如き數を假に合の算法の準數（又は單位）といふ。

さて再び入によりて、α を如何なる數となすとも

$$\alpha \circ \alpha' = \varepsilon$$

を充實すべき數 α' は必ず存在す。α α' の關係は相互同一にして、此二つを假に相反せる數と云ふ。しかするときは一般に

$$(\beta \circ \alpha') \circ \alpha = \beta \circ (\alpha' \circ \alpha) = \beta \circ \varepsilon = \beta$$

よりて

$$\beta * \alpha = \beta \circ \alpha'$$

α を合するは α に反せる數を離するに同じく、合の算法も離の算法も其致一なり。

（二）

前節に說きたる合離の算法を加法及減法となすときは、五、六、八は負數（負の整數）の相等及加法減法に關して次の結果を與ふ、

$$a+b'=a'+b \text{ なるとき } a-b=a'-b'. \qquad (1)$$

$$(a-b)+(a'-b')=(a+a')-(b+b') \qquad (2)$$

$$(a-b)-(a'-b')=(a+b')-(a'+b) \qquad (3)$$

$a-a$ なる數は a に關係なし、是卽ち加法の準數にして、此新しき數を0と名づく。0の關係せる加法は次の如し。

$$a+0=a, \quad 0+a=a; \quad 0+0=0. \qquad (4)$$

0の關係せる場合にも(1)(2)(3)は無論成立すべし。

自然數 a が b より小なるときは $a-b$ は新しき數なり。此場合に於ては $a+c=b$ なる如き自然數 c は存在す、而して(1)によりて

$$a-b=0-c$$

$0-a$ を略して單に $-a$ と書く。凡て負數は常に斯の如き標準形式を有す。加法又は減法に於て各の數に代ふるに之に等しき數を以てすることを得るが故に、凡て負數を標準形式に表はしたりとするときは、(2) より次の結果を得

$$\left.\begin{aligned} a+(-b) &= a-b \,:\, a>b \\ &= -(b-a) \,:\, a<b \\ (-a)+(-b) &= -(a+b). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

又 $a+(-a)=0$ にして $-a$ は加法につきての a の反數なるが故に、$-a$ を減ずるは、a を加ふるに同じく、又 $-a$ を加ふるは a を減ずるに同じ。

正負整數の範圍內に於ては加法、減法は(二)の諸原則に遵ひ、又凡ての場合に可能なり。然れどもこゝに尙ほ考ふべきは、此範圍內に於ける乘法の意義なり。乘法は分配の法則に遵ふを要するが故に

$$(n+0)m = nm + 0.m$$

さて $n+0=n$ なるにより

$$nm = nm + 0.m$$

故に(4)によりて

$$\left.\begin{array}{l} 0.\beta=0 \\ \beta.0=0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

又交換の法則によりて

之によりて0の關係せる乘法の意義は定まれり。次に又

$$\{\alpha+(-\alpha)\}\beta=\alpha\beta+(-\alpha)\beta$$

即ち

$$0=\alpha\beta+(-\alpha)\beta$$

より

$$(-\alpha).\beta=-(\alpha\beta) \quad (7)$$

を得、交換の法則によりて

$$\beta.(-\alpha)=-(\alpha\beta) \quad (8)$$

又βに代ふるに$-\beta$を以てして

$$(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta \quad (9)$$

を得。以上の諸式によりて負數の關係せる乘法の意義は全く定まれり。一般に若干の數の積は負數因子の數の偶數たると奇數たるとに從て正又は負なり、積の絶對値は因子の絶對値の積に等し。積の0に等しきは因子の中少くとも

一つが0なる場合に限れり。是によりて乘法の組み合はせの法則及交換の法則の正負整數の範圍內に於ても仍ほ成立せるを知るべし。負數及び0の關係せる乘法の意義は分配の法則を特殊の場合に適用して之を定めたり。然れども乘法の意義既に定まりたる上は、分配の法則が果して凡ての場合に於て成立すべきや否や、此疑問は尙ほ解決を待てり。

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

は γ の0なるとき及び α、β の中一方又は雙方の0なる場合には自ら明なり。又此等式若し γ の正數なるとき常に成立せば、γ を之に反せる負數となすとき亦然らざるを得ず、是故に先づ γ を正數とし、α、β が共に正數なる場合を除き、次の三つの場合につきて此等式を驗證せば則ち足る。

α、β 共に負數なるときは $\alpha=-\alpha'$、$\beta=-\beta'$ と置くに、上の等式の左邊は $-\{(\alpha'+\beta')\gamma\}$ に、又其右邊は $-\alpha'\gamma-\beta'\gamma$ に等しく、兩邊の相等しきこと明白なり。α、β の中一は正、一は負なるときは、加法の交換の法則により其いづれ

を正數なりとするも結果は一樣なるが故に、例へば a, b は正 $c=-d$ は負にして、先づ $b>d$, $b=e+d$ となすときは、上の等式の左邊は ae に、又其右邊は $ab-ad$ に等しくして此等式は成立す。次に又 a, b, $c=-d$, $b<d$, $e+b=d$ と置かば、上の等式は $-ae=ab-ad$ となりて直に明了なり。分配の法則の凡ての場合に成立するを知るべし。

最後に尙乘法及び其轉倒の結果の唯一なるべきを證明せざるべからず。先づ $a=a'$ より $b=b'$ より $ab=a'b'$ を得んと欲せば、次の如く考ふべし。$a=a'$ より $a-a'=0$, $(a-a')b=0$. $b=0$ 卽ち $ab-a'b=0$, $ab=a'b$. 又 $b=b'$, $b-b'=0$, $a'(b-b')=0$, $a'b=a'b'$ よりて $ab=a'b'$.

次に $ab=c$, $ab'=c$ より $b=b'$ を得んとするに、先づ $ab-ab'=c-c=0$ 卽ち $a(b-b')=0$. 是故に a 及び $b-b'$ の中少くともいづれか一方は0に等しからざるを得ず。よりて a が0ならざるときは $b-b'=0$ 卽ち $b=b'$. a が0なるときは、$b=b'$ なるを必せず、乘法の轉倒の唯一なるべしといへ

る原則は、0の關係せる場合に於て一の例外を獲たり。こゝに證明せるは乘法の轉倒の可能なるとき、其結果の一般に唯一なるべしといふに過ぎず。除法は正負整數の範圍内に於て未だ汎通を得ず。

(四)

負數の觀念は既に定まり、吾人の要求の一半は貫徹せり。さて(三)の說明に於て所謂「本來の數」を正負の整數とし、合離の算法を乘法除法となして、再び新しき數(分數)を導き出さんとす。

$a \circ b$, $a * b$ に代ふるに ab, $\frac{a}{b}$ を以てするときは(三)の五、六、八より分數の相等及其乘法、除法の意義を得。

$ab' = a'b$ なるとき $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$　(1)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \quad (2)$$

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'b} \quad (3)$$

此等式によりて分數の相等及其乘法、除法を定むるときは(二)の諸原則の成立すべきことは既に(三)に於て證明せる所なり。乘法の準數は1にして、乘法につきて相反せる數は卽ち所謂逆數なり。

分數相等の定義(1)に從ふときは、一般に $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$；特に $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$ を得。又乘法の定義(2)より $\frac{a}{b}\cdot b=a$ 又除法の定義より $1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ を得。此等の諸定理一々枚擧するの要なし。

さて分數の加法及減法の意義を定めんとせば、再び分配の法則を用ゐるべし。

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)bb'=\frac{a}{b}bb'+\frac{a'}{b'}bb'=ab'+a'b$$

より

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{ab'+a'b}{bb'}$$

を得。此等式は既に減法の定義

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{ab'-a'b}{bb'}$$

を含蓄す。斯の如くにして定められたる加法減法の結果唯一なること及加法の組み合はせの法則及交換の法則は容易に驗證せられ得べし。例へば組み合はせの法則を證せんに

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}+\frac{a''}{b''}=\frac{ab'+a'b}{bb'}+\frac{a''}{b''}=\frac{ab'b''+a'bb''+a''bb'}{bb'b''}$$

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{a'}{b'}+\frac{a''}{b''}\right)=\frac{a}{b}+\frac{a'b''+a''b'}{b'b''}=\frac{ab'b''+ba'b''+ba''b'}{bb'b''}$$

其他類推すべし。

前節の結尾に特筆せる除法の例外は分數を導入せるが爲に撤去せられたるにあらず。$\frac{a}{b}$の如き記號はbの0なるときは沒意義なり。假にbが0なる場合に(1)を適用すれば、形式的に

$$\frac{a}{0}=\frac{a'}{0}\text{，}\quad\therefore\ \frac{0}{0}=\frac{a}{a'}$$

を得。第二の等式は$\frac{0}{0}$が如何なる分數にも等しきを示せり。卽ち$0/0$に一定の意義なきなり。第一の等式は$\frac{a}{0}$はaに關係なきを示せり。今若し此等

式に誘惑せられて、例へば $\frac{1}{0}=\infty$ なる一個の「最新數」を作るときは、$1=0.\infty$ なる關係の、0と∞との積が如何なる數にも等しきを示すに遇ひて、狼狽せん。更に(2)に於て b を0となさば

$$\infty\cdot\frac{1}{2}=\infty$$

を得、又三に於て b、b' を共に0となさば

$$\infty:\infty=\frac{0}{0}$$

を得。

又減法の定義より

$$\infty-\infty=\frac{0}{0}$$

を得。斯の如き奇異なる等式は畢竟何事をか示せる。此疑問の解釋は一言にして盡すべし。曰く、強て0を法とせる除法を成立せしめんが爲に、上の如く∞なる一個の數を作成するときは、數に關する諸の原則は盡く其統一を失ふ。乘法の結果唯一なるべしとの法則は $0.\infty=1$ の爲に破壞せられ、減法の結果唯一なるべしとの法則は $\infty-\infty=\frac{0}{0}$ の爲に攪亂せらる。最も甚しきは

$m:0$なる除法を成立せしめんとして、直に再び$\infty:\infty$なる除法の例外に撞着せること是なり。數の範圍を擴張する目的は、法則の統一を保持するにあること吾輩の既に認めたる所なり。∞なる數は排斥せざるべからず。算法適用の區域に限界あるは自然なり。0を法とせる除法の絶對的に排斥すべきは、卽ち算法適用の區域の自然の限界の最好例なり。

高等數學に於て∞なる記號の常に用ゐらるゝことは吾輩のこゝに言へる所に牴觸せりと誤解すること勿れ。∞なる記號は數學に於て決して一個の數を表はすことなし。例へば$\frac{1}{x}$なる式に於てxが漸次減少して限りなく0に近接するときは、$\frac{1}{x}$は漸次増大して其究まる所を知らず。此事實を書き表はさんが爲に$\lim_{x=0}\frac{1}{x}=\infty$なる記法を用ゐる、更に之を簡約して$\frac{1}{0}=\infty$と書くの俑を作れるは誰ぞ。初學者を誤るの甚しき、此記法に過ぐるはなし。$\frac{1}{0}$又は∞は或數を表はせるにあらず、$\frac{1}{0}$も∞も獨立しては意義を有せず、$\frac{1}{0}=\infty$なる配合をなして後、始めて上に言へる複雜なる事實を表はすの暗號とな

ることを得るに過ぎず。

(五)

上述の徑行によりて形式的論理上有理數の觀念を確定することを得たりと雖、斯の如くにして定められたる數は未だ大小なる語によりて表はさるゝ性質を具へず。今此缺點を補はんと欲せば正負の觀念より發足するを便利なりとす。」

0は正負の外に超立せる中性の數にして、自然數は凡て正數なり、其他の整數は(四)にいへるが如く $0-a$ の如き(aは自然數)標準的の形式を有す、これらを負の整數となす。

一般に有理數の正負を定むるには符號の法則を根據とすべし。同號の二數の積は正、異號の二數の積は負なり。形式的に此事實を次の如く書き表はすことを得

$$(\pm)(\pm)=+,\qquad (\pm)(\mp)=-$$

此法則は整數につきては既に成立せり、(三)の(7)(8)(9)を參照すべし。今此法

則を凡ての有理數につきて成立せしめんと欲せば、同號の二數の商は正、異號の二數の商は負なりとなさゞるを得ざるが故に、分母、分子が同號の整數なる有理數は正、又異號の整數なるは負なりと謂ふべし。而も有理數の正負を斯く定むるときは、緫て又符號の法則が一般に成立すべきこと容易に驗證せらるべし。又正數の和の必正なること及負數の和の必負なるべきこと明白なり。

正負の意義既に定まりたる上は次の如くにして大小の意義を定むることを得。」

$\alpha-\beta$ が正なるときは α を β より大なりといひ、$\alpha-\beta$ が負なるときは α を β より小なりといふ。

自然數の大小はよく此定義と調和せり。又此定義に從ふときは、凡て正數は0より大、負數は0より小にして、又正數は負數より大なり。

α が β より大ならば、β は α より小なり。げにも $\alpha>\beta$ なるが故に $\alpha-\beta$ は正、隨て $\beta-\alpha$ は負なり。卽ち $\beta<\alpha$

α は β より大に、β は γ より大ならば、α は γ より大なり。げにも $\alpha-\beta$

$\beta-\gamma$ は共に正なりといふが故に、其和 $\alpha-\gamma$ も亦正、卽ち $\alpha>\gamma$ なり。

$\beta>\beta'$ ならば $\alpha+\beta>\alpha+\beta'$ げにも $(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta')=\beta-\beta'>0$ 特に $\beta>0$ 卽ち β が正ならば $\alpha+\beta>\alpha$ 又 $\beta<0$ 卽ち β の負ならば $\alpha+\beta<\alpha$ 又 $\beta>\beta'$ と共に $\alpha-\beta<\alpha-\beta'$

α が正數なるときに限り $\beta>\beta'$ より $\alpha\beta>\alpha\beta'$ を得、α 若負數ならば却て $\alpha\beta<\alpha\beta'$ なり。これ $\alpha\beta-\alpha\beta'=\alpha(\beta-\beta')$ は $\beta-\beta'$ が正なる爲め、α と同號の數なるによる。此關係が加法の場合と少しく其趣を異にせるに注意すべし。

正數負數の大小に關係せる諸々の定理枚擧に遑あらず、要するに其根據は上出の大小の定義隨て符號の法則に盡きたり。

こゝに述べたる大小の意義は一見常識に反せり、負數をば代數學の範圍に屬せりとなす舊習に因りて之を代數的の大小と言ふことあり。常識の所謂大小は絕對値の大小なり。

$\alpha+\alpha'=0$ なる關係をなせる二數 α、α' 共に0ならざるときは、其中唯一つは

正にして他の一つは負なり、其正なるを α 及び α' の絶對値といふ、負數の大小は其絶對的の大小に反す。

α、β が同號の數なるときは、其和の絶對値は、α 及び β の絶對値の和に等しく、α、β が異號の數なるときは、和の絶對値は α、β の絶對値の差に等し。積の絶對値は常に因子の絶對値の積に等し。

所謂代數的の大小は應用上に於て便利なる場合あり又然らざるあり。其不便は多くは上に述べたる乘法の場合に於て $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ と $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ との一般に相隨伴せざる處より生ず。

ダランベルは正數の負數より大なりといふを否認して次の如く論ぜり、$1:-1=-1:1$ なる等式を看よ、若し -1 にして 1 より小ならば此等式の左邊に立てる比は其前項後項より大なり、是卽ち優比（其値1より大なる比）にして、右邊に立てるは劣比（其値1より小なる比）なり。卽ち -1 が 1 より小なりとの假定は優比が劣比に等しとの結論を誘致する者なり。斯の如き誤解の原因

は又上述の負數乘法の特異なる現象に基づく。前項が後項より大なる比の値が１より大なりといふは是其絶對値につきて言ふなり。１：－１なる比の値は－1にして、こは１より大ならず。ダランベルは１＞－１故に兩邊を－1にて除し　１：－１＞－１：－１　即ち　１：－１＞１　を得となせるなり。代數的の大小に關する事實を論ずるに當ては、最此陷穽を恐るべし。

大小の觀念を基礎として前諸章にて順次定めたる有理數も、又算法の汎通を根據として此章に說きたる有理數も、畢竟觀念の內容に於ては異なる所なし。一は綜合的にして、一は分析的なる、二樣の徑行によりて、同一の觀念に到達することを得たり。

第八章　量の連續性及無理數の起源

具體の量、抽象の量○量の原則、量の比較、加合及連續○「有理區域」、其性質、量の公約、公倍○量を計るとは何の謂ぞ○ユークリッドの法式、二つの場合○公約なき量の實例

○ユークリッドの比の定義、比と有理數との相等及大小、二つの比の相等及大小○量と直線上の點との對照、稠密なる分布は連續に非ず、連續の定義○結論、數の原則

（一）

物の長短、輕重、明暗、冷熱、時の遲速、運動の緩急、音の高低强弱等、凡そ人の感覺に大小其度を異にする印象を與へ得べきは、皆量なり。量の特徴は其大小にあり、物の長短を考ふるに當ては、即ち唯其長短を觀る、其他の性質例へば其輕重、冷熱、色彩の濃淡等擧て之を度外に置く、又其冷熱を考ふるに當ては其長短、輕重、剛柔等盡く措て問はず。斯の如くにして長短、輕重等を各一種の量と考ふるに至る。若し更に一歩を進めて、物の如何なる性質につきて其大小を考ふるかをも顧慮せずして、即ち、長短、輕重、冷熱につきて、唯其大小を觀て、其長さの大小、質量の大小、溫度の大小なるを問はざるときは、絶對的抽象的の量の觀念に到達す。

絶對的の量の觀念の內容は、即ち凡ての量に普遍なる特徵の全體より成る。然

れども絶對の量は抽象的にして捕捉し難し、若し具象的の例證を得んと欲せば、直線の長さは就中最明亮なる印象を與ふべし。

量は之を計ることを得、量を計りたる結果は數を以て之を表はすことを得。さて量を計るとは如何、又量と數との關係は如何。

數學に於て量と稱する者既に抽象的なり、量を計るといふことも亦理想的ならざるを得ず。實際上具象的の量を測定するは、畢竟外界が吾人の感覺に與ふる印象の強弱を定むるに外ならず。之を定むるに精粗あり、物に觸れて其冷熱を知り、音を聽きて其高低を知るは不精確なり。尺度を以て物の長さを測り、望遠鏡を以て星辰の運行を觀て時刻を計るは精密なる測定なり。然れども斯の如きは測定の結果に精粗の差こそあれ、最終に訴ふる所は吾人の感覺に外ならず、卽ち觀測の方法と共に其結果の精粗異なるも、要するに是れ程度の問題にして、絶對的の精確は決して期すべからず。

實際に於ける量の測定には精確の度に限界あるを免るべからざるが故に、斯

の如き測定の結果を表はすには整數のみを以て之を辨ずべし。小數を用ゐて應用上の便利を享くることあるべきも、小數點以下、假に七桁と言はんか、十桁と言はんか、若干の限りある位數以上を採るの必要なき上は、是實は整數のみを用ゐるに異ならず。

然れども實際上精密に之を測定し得べきと然らざるとを度外に置きて、理想上、各の量に一定不動の大さありとなすことを禁ずる能はず。數學に於て量といひ又量を計るといふは、斯の如き理想上の意義に於てしかいふなり。

（二）

吾輩の稱して量となすは、次に掲ぐる諸々の性質を具へたるものに限る。

第一、量の比較に關する原則。

一、A、Bなる二つの量の與へられたるとき、其間に次の三つの關係の中、いづれか一つ而も唯一つのみ成立す。

AはBに等し、　$A=B$

A は B より大なり、　$A > B$

A は B より小なり、　$A < B$

等しといひ大小といふ語の意義は、よく第一章(二)及第三章(一)に掲げたる規定に遵ふべきを要す。又量の間に成立する關係は其量に代ふるに之に等しき他の量を以てせるが爲に影響を被ることなしとす。例へば $A > B$, $A = A'$, $B = B'$ なるとき $A' > B'$ なる如き是なり。

第二、量の加合に關する原則。

一、A, B なる二つの量の與へられたるときは、之を加合して、一定せる第三の量 C を得、$A + B = C$.

C が一定の量なりとは $A + B = C$, $A + B = C'$ より $C = C'$ を論斷し得べしといふに異ならず。

二、組み合はせの法則。$(A + B) + C = A + (B + C)$

三、交換の法則。

$$A + B = B + A$$

四、加合と大小との關係。$A+B>A$ 又 $A+B>B$ と共に $A+B>A'+B'$

五、加合の轉倒。A、B なる二つの量の與へられたるとき、$A>B$ ならば、$A=B+C$ なる如き量 C は必ず存在す。$C=A-B$

斯の如き量 C の唯一個に限り存在し得べきこと、及び C の A より小なるべきことは四の當然の結果なり。

倍加は加合の特例にして、量の倍加に關して第五章(四)に說きたるが如き諸事實の成立すべきこと明白なり。A なる量 n 個を加合して得たる量を A の n 倍といひ、之を表はすに nA なる記號を以てす。

第三　連續の原則

量は連續の性質を具ふ。

量に連續ありとは、量の變動(卽ち其增減)の連續的なるを得るをいふ。物の數の變動の少くとも一個を下ることを得ざるが如きは卽ち變動の連續的ならざるなり、之に反して、例へば長さ、時間の如き所謂量にありては其變動連續的

なるを得ること何人も承認する所なり。　然れども連續といふことを最明白に言ひ表はすことは甚だ難きが故に、其說明は之を後條に讓り、此處には姑らく量の連續に關せる二三の事實を列記するに止むべし。

アルキメデスの法則。　A、B なる量與へられ、A は B より大なるとき、B を幾回も加合し行きて、竟に A より大なる量に到達すべし、即ち B の倍の中に必ず A より大なる者あり、$nB > A$ なる如き自然數 n 必ず存在す。

等分の可能。　凡て量は之を任意の相等しき部分に分ち得べし、即ち A なる量と n なる自然數の與へられたるとき $A = nB$ なる如き量 B は必ず存在す。B を A の n 分の一と名づけ、之を表はすに A/n なる記法を以てす。B の如き量は唯一個に限り存在し得べきこと勿論なり。

稠密なる分布。　A、B が相異なる量ならば A、B の中間に必ず第三の量 m を容る、隨て A、B の中間には無限に多くの量存在す。

此事實は前條の當然の結果なり。　今 A を B より大なりとせば、第二原則五に

よりて $C = A - B$ なる如き量 C は必ず存在す。さて等分の可能に基き $\frac{C}{2}$ なる量は必ず存在し、$B + \frac{C}{2}$ は A、B の中間にあり、$A > B + \frac{C}{2} > B$

量に最大の者なく、又最小の者なし。げにも A を如何なる量なりとするも $2A$ は A よりも大にして又 $\frac{A}{2}$ は A よりも小なり。

以上列擧せるはいづれも量の連續に關せる性質なり。然れども、これら未だ連續といふことの特徴を盡すに足らざること、後文に至て自ら明なるべし。

(三)

量の倍加及等分に關して第五章(四)に說ける如き諸定理成立す、これらの諸定理はいづれも極めて明白にして、殆んど辯說を要せず。此處に記法の說明として唯一つの事實を擧ぐべし。

A を一の量とし、m、n を自然數となすときは $\frac{mA}{n}$ は A の m 倍 mA の n 分の一を、又 $m\left(\frac{A}{n}\right)$ は A の n 分の一の m 倍を、表はし、兩者相等しきこと容易に證明せられ得べし。此相等しき量を表はすに

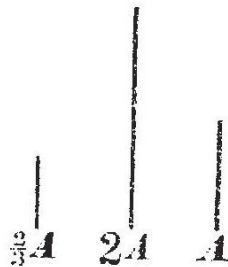
なる記法を以てす。又は $\frac{m}{n}$ なる分數を一個の文字例へば r にて示せるとき

$$\frac{m}{n}A$$

は、更に之を畧して

$$rA$$

と記すべし。此處なほ讀者の注意を乞ふべき一條あり。こゝに A、B の如き文字を以て量を表はせること是なり。卽ち此等は量の數値を表はせるに非ずして直に量其者を代表せるなり。例へば A を以て圖の第一の直線(長さ)を表はせりとせば $2A$ は第二、$\frac{2}{3}A$ は第三の直線を表はせり。A の幾寸、幾インチ、幾センチメートルなるかは問ふ所に非ず、否、A は若干寸、若干インチなりとは如何なる意義を有するかは、吾人の之より進みて知らんと欲する所なり。

A　　$2A$　　$\frac{2}{3}A$

Eなる量の與へられたる時、rを正の有理數(自然數及び正の分數)となしrEの如き量、卽ちEより倍加及び等分によりて作り得べき量を總て一括し、假に之を有理區域と名づけ、此有理區域はEなる量によりて定められたりと稱す。

Eの定むる有理區域に屬せる二個の量rE $r'E$の和又は差は$(r \pm r')E$にして、此量は又同一の有理區域に屬せり。又nを自然數とせば$\frac{rE}{n} = \frac{r}{n}E$卽ち或有理區域に屬せる量に加合(及び倍加)等分を施こせる結果は亦同一の有理區域に屬せる量なり。

Eの定むる有理區域に屬せる量の一つをE'と名づけ$E' = e'E$と置く、e'は自然數又は正の分數なり。さて一般にrを以て正の有理數を表はすときは(三)によりて

$$rE' = re'E, \quad rE = \frac{r}{e'}E'$$

にして$\frac{r}{e'}$は勿論正の有理數なるが故にEの有理區域に屬せる量は必ず亦

E' の有理區域に屬す。此等の關係は E、E' の同一の有理區域を定むるを示せり。語を換へて之を言はゞ、凡て有理區域は之に屬せる唯一つの量によりて全く定まるなり。

A_1、A_2 が同一の有理區域(例へば E の定むる有理區域)に屬せる量ならば

$$A_1 = \frac{m_1}{n_1} E, \quad A_2 = \frac{m_2}{n_2} E$$

なるにより

$$m_2 n_1 A_1 = m_1 n_2 A_2 = m_1 m_2 E$$

$m_2 n_1$, $m_1 n_2$ なる二つの自然數が相素ならずば之を其最大公約數にて除し

$$a_2 A_1 = a_1 A_2$$

なる如き相素なる自然數 a_1、a_2 の必ず存在すべきを知る。此相等しき量を M と名づくれば M は A_1 及び A_2 の倍量、卽ち A_1 A_2 の公倍量にして、而も A_1 A_2 の公倍量の中最小なる者なり。M を A_1 A_2 の最小公倍量といふ。上の關係より

$$\frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2}$$

を得、之をDと置かばDはA_1、A_2の最大公約量なり。最大公約量といふ語の意義は說明を須ひずして明瞭なるべし。MとDとの間には次の關係成立す。

$$M = a_1 a_2 D.$$

A_1 A_2の公倍量は凡てMの倍量にして、A_1 A_2の公約量は凡てDの約量なり。又Dの約量は盡くA_1、A_2の公約量なるが故に、A_1 A_2には限りなく多くの公約量存在せり。

以上の觀察によりて次の結果に到達す。

公倍ある二量には公約あり、又公約ある二量には必ず公倍あり。公約ある二量は唯一つの最大公約及び無限に多くの公約を有す。同一の有理區域に屬せる二つの量には必ず公約あり、公約を有せる二つの量は必ず同一の有理區域(例へば此公約の定むる有理區域)に屬す。有理區域は二つづつ互に公約を有する凡ての量の集合なり。

(四)

量を計るといふことは前に述べたる量の原則を基礎とす。Aなる量の與へられたるとき、一定の量Eを採りて之を單位となし、Eを倍加して

$$E,\ 2E,\ 3E, \ldots\ldots nE, \ldots\ldots \qquad (1)$$

等の量を作り、之をAと比較するに、Aが此等の量の中の一つに等しく、例へば$A = nE$なるときは、nは卽ちEを單位としてのAの數値なり。若しEの倍に等しからずば、アルキメデスの法則によりて、Eの倍にしてAよりも大なるもの必ず存在す、隨て(1)の量の中Aより大ならざるものは其數限りあり。故に其中に一個最大の者なかるべからず。今nEを以て(1)の量の中Aを超えざる最大の者となさば

$$(n+1)E > A > nE \qquad (2)$$

にして、此場合に於ては、Aの數値はnより大にして$n+1$より小なりといふ。若し

$$A - nE = R$$

と置かば

$$A = nE + R, \quad R < E$$

即ちAと數値nなる量との差RはEより小なり。斯の如くにしてEを單位として、AをEの程度まで計ることを得。

若し更にtを1より大なる自然數とし、

$$E' = \frac{E}{t}$$

と置き、Eに代ふるにE'を以てして、同樣の手續きを反復し、例へば

$$A = mE' = \frac{m}{t}E \qquad (1^*)$$

なる結果に到達したるときはE'を單位としてのAの數値は$\frac{m}{t}$なり、或は又(2)に於ける如く

$$(m+1)E' > A > mE'$$

ならば

$$\frac{m+1}{t}E > A > \frac{m}{t}E \qquad (2^*)$$

にして、A の數値は $\frac{m}{t}$ より大にして、$\frac{m+1}{t}$ より小なり、若し

$$A - mE' = R'$$

と置かば

$$A = \frac{m}{t}E + R', \quad R' < \frac{E}{t}$$

にして、斯の如くにして A を $\frac{E}{t}$ の程度まで計ることを得たり。

今任意に D なる量を與ふるときは、アルキメデスの法則によりて

$$D > \frac{E}{t}$$

なる如き自然數 t は必ず存在す。斯の如く t を定めたる後(1*)又は(2*)により

て m を定むるとき

$$A = \frac{m}{t}E + R, \quad R < \frac{E}{t}$$

$$R < D$$

より

を得、Dの程度までAを計ることを得。

是に由りて考ふるに、Aを計るとはEなる單位を定め、Eの定むる有理區域に屬せる量

$$\frac{m}{t}E$$

とAとを比較するに外ならず。A若し此有理區域に屬せば、卽ち若し

$$A=\frac{m}{t}E$$

なる如き量$\frac{m}{t}E$存在せば、$\frac{m}{t}$をAの數値となす。單位Eと數値$\frac{m}{t}$との與へられたるとき、Aなる量は一定なり。若し又Aが此有理區域に屬せざるときは、如何程小なる量Dを豫め定むるとも

$$A-\frac{m}{t}E<D$$

又は

$$\frac{m}{t}E-A<D$$

なる如き量$\frac{m}{t}E$は必ず存在す。然れども此場合にはAの數値は$\frac{m}{t}$より大、

又は $\frac{m}{t}$ より小なり。E と $\frac{m}{t}$ との與へられたるとき、上の如き條件に適合すべき量 A は限りなく多く存在せり。A は未だ E 及び $\frac{m}{t}$ と共に一定せりと言ふことを得ず。

茲に於てか次の疑問を生ず、E なる定まりたる量より倍加及び等分によりて作り得べき量の範圍卽ち所謂 E の有理區域は果してよく凡ての量を包括するか、或は又此範圍に含蓄せられざる量は實際存在すべきか。又若し此の如き量にして存在せば、其數値は如何。

(五)

ユークリッドは二つの量の公約を定むる方法を敎ふ。此方法は現代の數學に於ても甚重要なる者にして、ユークリッドの法式の名を以て汎く知られたり。

先づ A_1 A_2 なる二つの量を與ふ、此中の一方例へば A_1 が他の一方 A_2 の倍量なる場合($A_1 = A_2$ を含む)は最簡單にして辨明を要せず。A_1 若し A_2 より大にして、而も A_2 の倍量ならずば、(四)に於て說きたる如くにして

$$A_1 = n_1 A_2 + A_3, \quad A_3 < A_2$$

なる如き自然數 n_1 及び A_3 なる量を定むることを得、A_2、A_3 につきて同樣の手續きを行ひ

$$A_2 = n_2 A_3 + A_4, \quad A_4 < A_3$$

を得、次第に斯の如くにして、一般に

$$A_k = n_k A_{k+1} + A_{k+2}, \quad A_{k+2} < A_{k+1} \qquad (1)$$

を得。A_1、A_2 より順次減少する一定の量の引續き A_3、A_4、A_5……を作る。

さて茲に二つの場合を區別すべし。

第一、此手續きを繼續すること若干回にして

$$A_{h-1} = n_{h-1} A_h \qquad (2)$$

の如き關係竟に一度は成立し、ユークリッドの法式こゝに其終局に達するときは、A_1、A_2 は公約を有し、A_h は卽ち其最大公約量なり。

實にも、先づ(2)によりて A_h は A_{h-1} の約量なり、次に(2)に先てる

より

$$A_{h-2} = n_{h-2} A_{h-1} + A_h$$

$$A_{h-2} = (n_{h-2}\, n_{h-1} + 1) A_h$$

を得、A_h の亦 A_{h-2} の約量なるを知る、次第に斯の如く遡り行きて竟に A_h は……A_3、A_2、A_1 の約量なるを知る、A_h は A_1 A_2 の公約量なり。

是故に A_1 A_2 には公約量あり、其一つを D と名づくれば D は亦 A_3 の約量、隨て又 A_4、A_5……A_h の約量なり。A_h は A_1 A_2 の公約量にして、A_1 A_2 の公約量は必ず A_h の約量なり。是 A_h が A_1 A_2 の最大公約量なるを示せるに非ずして何ぞや。

第二の場合は、ユークリッドの法式の決して終局に達することなき、是なり。

さて

$$A_h = n_h A_{h+1} + A_{h+2}, \quad A_{h+1} > A_{h+2}$$

にして、又 $A_h > A_{h+1}$ 隨て $n_h \geqq 1$, $n_h A_{h+1} > A_{h+2}$ なるにより

$$A_h > 2 A_{h+2}$$

是故に

$$A_1 > 2A_3,\quad A_3 > 2A_5,\quad A_5 > 2A_7,\ \ldots\ldots\ A_{2h-1} > 2A_{2h+1}$$

隨て

$$A_1 > 2^h A_{2h+1};\qquad A_{2h+1} < \frac{A_1}{2^h} \qquad (3)$$

又同樣にして

$$A_{2h+2} < \frac{A_2}{2^h} \qquad (3)$$

或は $A_1 > A_2$ なるにより、A_{2h+1} 及び A_{2h+2} は共に $\frac{A_2}{2^h}$ より小なり。

是によりて A_1、A_2、A_3、A_4……は順次減少して、究まる所なし。K を如何に小なる量なりとするも、A_n は附數 n の增大するとき、竟に K よりも尙小となるべし。

其故如何にといふに、先づ

$$A_2 < gK,\qquad K > \frac{A_2}{g} \qquad (4)$$

なる如き自然數 g はアルキメデスの法則によりて必ず存在す。さて、指數 m を相當に採りて

$$2^m > g \qquad (5)$$

となすことを得、例へば 2 を命數法の基數として g を展開するとき、g の桁數、若干、此桁數を m とせば第二章(七)によりて上の不等式は成立すべし。

K の與へられたるとき(4)に從て g を定め、次に(5)に從て m を定むれば

$$K > \frac{A_2}{g} > \frac{A_2}{2^m}$$

よりて(3)によりて

$$K > A_{2m+1},\ A_{2m+2}$$

A_{2m+1}・A_{2m+2} は果して K よりも小なり。

斯の如く A_1、A_2、A_3……は漸次減少して究まる所なきが故に、此第二の場合に於ては A_1、A_2 に公約あるを得ず。げにも假に A_1 A_2 に公約ありとせば、其一を D と名づけんに、D は亦 A_3、A_4……の約量ならざるを得ず、而も A_3、A_4……は漸次減少して竟に如何なる量よりも、隨て D よりも小となるべきが故に、是不可有の事に屬せり。

A_1、A_2に公約あるときはユークリッドの法式は其終局に於てA_1A_2の最大公約量を與ふ、ユークリッドの法式終局に達せざるときはA_1A_2に公約あることなし。然りと雖、實際に於てA_1A_2なる二つの量、例へば二つの直線の與へられたる時、此方法を利用して其公約の存否を決定することを得ず。何となればA₁A_2に上述の手續きを適用すること若干回にして未だ終局に達せざりしとするも、其竟に終局に達すべきや否やは、之によりて決定すべからざればなり。凡ての場合に於て、公約の存否を決定して誤る所なき方法は吾人未だ之あるを知らず。

(六)

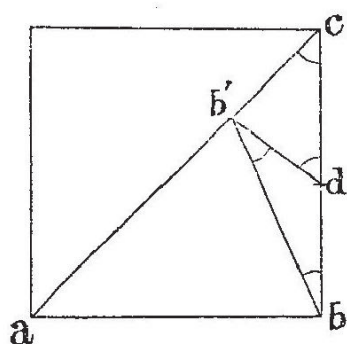
公約なき二つの量は存在すべきかとの疑問の解決竟に如何。ユークリッドの法式は公約ある場合に、最大公約を與ふ、ユークリッドの法式終局に達せざるを確め得ば、公約の存在せざるを知るべしと雖、ユークリッドの法式は其自身の竟に終結すべきや否やを教ふるものにあらざるを奈何せん。

ユークリッドの法式の根據は(二二)に述べたる量の原則にあり。今翻て此原則を吟味せば、此原則が公約なき二量の存否を決定するに足らざるを悟らん。一有理區域以外に量あるや否やは姑らく措きて、一有理區域の量のみに着眼して、之を一系統となすに、此系統はよく(二二)の諸原則に適合せり。(二二)の諸原則に於て「量」といへる語に代ふるに「一有理區域の量」といふを以てするとき、此等の諸原則は盡く實現せらるべし。有理區域內の二量必ず比較し得べく、其加合は常に同一有理區域內に於て可能にして、連續に關する三つの性質も亦一有理區域內の量のみにつきて既に成立す。

夫れ、一有理區域の量のみを以てして既に(二二)の諸原則を充實すべし。卽ち一有理區域以外に量あると然らざるとは(二二)の原則の與り知らざる所なり。公約なき二量の存否を決定すべき所以の者は此等の原則以外に之を求めざるべからず。

公約なき二量の實例は之をユークリッド幾何學より學び得べし。平方形の一邊

と其對角線とは公約なき二つの長さなりといへるは、ユークリッドの諸定理の中最有名なる者の一なり。

此有名なる定理の證明を此處に反復すること、決して其所を得ざる者と謂ふべからず。此定理はユークリッドの法式に終結あるを確知し得べき、特別の場合としても亦注意に値す。

ab を一邊とせる平方形の對角線 ac の上に於て ab = ab′ なる點 b′ を定め、b′ より ac に垂直に b′d を引きて、d に於て bc を切らしむ。

$$A_1 = ac \qquad A_2 = ab$$

と置かんに、先づ $A_1 > A_2$ さて三角形の二邊の和は他の一邊よりも大なるが故に

$$ac < ab + bc = 2.\,ab$$

卽ち

$$A_1 < 2\,A_2$$

よりて　$z_1 = 1$,　$A_1 = A_2 + A_3$,　$A_3 = cb'$

$$A_2 = cb = db + cd$$

c 及び d にて標ある二つの角は共に半直角なるが故に $cb' = b'd$. 又 b 及び b' にて標ある二つの角は相等しきが故に $b'd = db$ よりて $db = cb' = A_3$ さて cd は A_3 を一邊とせる平方形の對角線なるが故に

$$2A_3 > cd > A_3$$

よりて

$$3A_3 > A_2 = cd + A_3 > 2A_3$$

$$A_2 = 2A_3 + A_4$$

A_3 を一邊とせる平方形に於て A_4 は、A_2 を一邊とせる平方形に於ける A_3 と同様の位置にあるが故に、A_3、A_4 につきて同様の論法を反復し

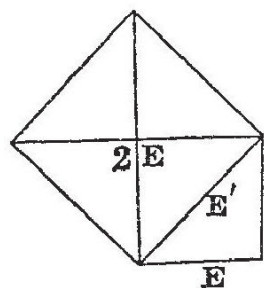
$$A_3 = 2A_4 + A_5$$

を得、次第に斯の如くにして、此場合に於てはユークリッドの法式の終局に達

することなきを推知すべし。

此結果は又次の如くにして之を説明することを得。先づ E を一邊とせる平方形の對角線を E' とせば、E' を一邊とせる平方形の對角線は、$2E$ なること圖を一見して明瞭なり。假に E' は E の有理區域に屬せりとなし、例へば $E' = rE$ なりとせば、又 $2E = rE'$ ならざるを得ず。故に $2E = r^2E$

隨て

$$2 = r^2$$

を得。さて斯の如き有理數 r の存在せざることは次の如くにして之を證明すべし。假に斯の如き有理數存在すとし、之を既約分數となして $\frac{p}{q}$ を得たりとせば $p^2 = 2q^2$ 即ち $2q^2$ は p の倍數ならざるを得ず、而も q 隨て又 q^2 は p と素なるが故に p は 2 の約數即ち 1 又は 2 なり。さて p は 1 なることを得ざることは明なり。若し p を 2 なりとせば $2 = q^2$ にして如何なる整數の平方も 2 に等しきを得ず。是故に $r^2 = 2$ なる如き有理數 r は存

在することなし。

(七)

ユークリッドの比例論は數の觀念の歴史の第一頁を飾りて特に異彩を放つ。讀者は、其嘗て初等幾何學の一節として相識れる此理論に、算術を榜標せる本書に於て再び邂逅するに驚くことなかるべし。

此處にエレメンツの字句を忠實に反復するの必要なし、吾輩はユークリッドの比の定義を次の如く言ひ表はさんとす。

第一定義。A、B なる二つの量の與へられたるとき、m n を二つの自然數となし、nA 及び mB を比較して三つの場合を區別す、一に曰く、nA は mB に等し、二、三に曰く nA は mB よりも大又は小なり。或は之を換言して、一に曰く $\frac{A}{m}$ は $\frac{B}{n}$ に等し、二、三に曰く $\frac{A}{m}$ は $\frac{B}{n}$ よりも大又は小なり。此三つが凡ての場合を網羅せることは(一)の第一原則の保證する所なり。 さて第一の場合に於ては A、B の比 $A:B$ は有理數 $\frac{m}{n}$ に等しといひ、第二、第三の場合に於ては $A:B$

は $\frac{m}{n}$ よりも大又は小なりといふ。卽ち

$$mA \gtrless nB \quad 卽ち \quad \frac{A}{B} \gtrless \frac{n}{m} \quad と共に \quad A:B \gtrless \frac{n}{m}$$

例へば A を B を一邊とせる平方形の對角線となすとき、m、n を1、2となさば $A<2B$ なるが故に

$$A:B<2$$

又 m、n を2、1となさば $2A>B$ なるが故に $A:B>\frac{1}{2}$

第一定義は $A:B$ なる者に、有理數に對する大小の順序に於て一定の位置を與ふ。$A:B$ なる者には本來定まれる意義あるにあらずして、吾輩のユークリッドと與に今新に其意義を定めんとするものなるが故に、$A:B$ と有理數との大小の關係は自家撞着に陷らざる限り、隨意に之を定めて不可あることなし。然れども大小相等の語には既に慣用の意義あるが故に、此意義に協はざる凡ての新定義は無益にして有害なり。玆に於て次の三點につきて、上文の第一定義を詮衡するの必要を生ず。

$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ なるとき $A:B=\frac{m}{n}$ と同時に $A:B=\frac{m'}{n'}$ なりや、
$\frac{m}{n}>\frac{m'}{n'}$ なるとき $A:B>\frac{m}{n}$ と同時に $A:B>\frac{m'}{n'}$ なりや、
$\frac{m}{n}<\frac{m'}{n'}$ なるとき $A:B<\frac{m}{n}$ と同時に $A:B<\frac{m'}{n'}$ なりや。

第一、$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$, $A:B=\frac{m}{n}$ より $mn'=m'n$; $nA=mB$ を得、隨て $mn'(nA)=m'n(mB)$ 即ち $mn(n'A)=mn(m'B)$ よりて $n'A=m'B$ 故に果して $A:B=\frac{m'}{n'}$ 第二、第三類推すべし。

A、B に公約あるときは、第一定義によりて $A:B$ は或有理數 r に等しく、(三) に説ける意義に隨て $A=rB$ 又若し A が B の有理區域に屬し $A=rB$ なる如き有理數 r にして存在せば、第一定義に從ひて $A:B$ は此有理數 r に等し。これ當然にして無奇なる事實なり。

然れどもユークリッドは既に公約なき二つの量の存在するを知れり。A、B に公約なきときは $A:B$ の比は如何。此場合にありては m、n を如何なる自然數

となすとも $mA = nB$ なること、卽ち $r = \frac{n}{m}$ を如何なる有理數となすとも $A : B = r$ なること決してあり得べからざるにより、$A : B$ は或は r より大に或は r より小なり。是故に $A : B$ より小なる有理數を盡く甲の群に編入し、又 $A : B$ より大なる有理數を盡く乙の群に編入して、凡ての有理數を兩分することを得。斯の如くにして $A : B$ より生出する有理數內の切斷は次の三條件を充實せり。

一、凡ての有理數(勿論正の有理數、以下同じ)は必ず甲乙二群の中いづれか一方に、而も唯一方にのみ屬す。

二、甲に屬する有理數は凡て乙に屬する有理數より小なり。

三、甲に屬する有理數の中に最大の者なく、乙に屬する有理數に最小の者なし。

第三の外は辨明を要せざるべし、甲に屬せる有理數の中任意に一個を採りて之を r_0 と名づくれば $A : B > r_0$ 卽ち $A > r_0 B$ さて $A - r_0 B$ と B とにアル

ギメデスの法則を適用して $A - r_0 B > \frac{B}{p}$ なる如き自然數 p の存在すべきを知る。卽ち $A > \left(r_0 + \frac{1}{p}\right)B$, $A:B > r_0 + \frac{1}{p}$ にして $r_0 + \frac{1}{p}$ なる有理數は r_0 より大にして而も仍ほ甲に屬せり。是によりて甲の有理數に最大の者あるを得ざるを知るべし。乙に屬せる有理數の中に最小の者あるを得ざること、亦同樣にして證明せらるべし。

斯の如くにして有理數の範圍に尙ほ缺陷あるを知り得たり。有理數の分布は各處稠密なりと雖、其中に公約なき二量の比 $A:B$ を以て塡充せられ得べき空隙を存せり。

凡ての比と凡ての有理數との大小相等の關係は第一定義によりて既に定まれり、今二つの比の相等及び大小の意義を定めんが爲に、ユークリッドと共に次の定義を立す。

第二定義　$A:B$, $A':B'$ 共に有理數に等しからば、此等の有理數の相等大小によりて比の相等大小を定む。二つの比の中一方例へば $A:B$ のみが有理數 r'

に等しからば $A:B$ と r' との相等大小によりて、兩比の相等大小を決す。二つの比がいづれも有理數に等しからずば、此等の比の與ふる有理數切斷の結果を比較すべし。甲、乙の語に代ふるに U O を以てし、$A:B$ より大又は小なる有理數の全體をそれぞれ O U 又 $A':B'$ より大又は小なる有理數との全體をそれぞれ O′、U′ と名づく。

さてこゝに三つの場合あり。

(一) $A:B$, $A':B'$ は同一の切斷を與ふ、卽ち O、O′ 隨て又 U U′ は全く同一の有理數より成る。此場合には $A:B$ と $A':B'$ とを相等しとなす。

$A:B$ と $A':B'$ とが同一の切斷を與へざるときは、O、O′ 隨て又 U、U′ は相異なり。

(二) O は O′ に屬せざる有理數(r)を含む。此場合には O′ に屬せる有理數は盡く O に屬せり。げにも、r は O′ に屬せず、隨て r は U′ に屬せるが故に、O′ の有理數は盡く r より大なり、さて r は既に O に屬せるが故に、r より大なる

有理數は盡く O に屬せり。是故に U′ は U に屬せざる有理數 (r) を含み、U に屬せる有理數は盡く U′ に屬す。　$A':B' > r > A:B$

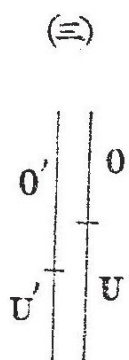
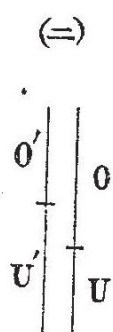
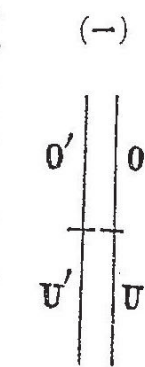
(三) O′ は O に屬せざる有理數 (r') を含む。此場合には O は O′ の一部分、U′ は U の一部分にして　$A:B > r' > A':B'$

(二) の場合には $A:B$ を $A':B'$ より小となし、(三) の場合には $A:B$ を $A':B'$ より大となす。

(一)(二)(三) は凡ての場合を網羅せり、此等の場合に於ける有理數兩斷の狀況は次の圖によりて説明せらるべし

(一)　O′ U′　O U

(二)　O′ U′　O U

(三)　O′ U′　O U

こゝに定めたる大小相等の意義につきても、亦次の諸點を審査せざるべからず。

$A:B = A':B'$,　$A:B = A'':B''$　と同時に　$A':B' = A'':B''$　なりや、

$A:B > A':B'$，$A':B' > A'':B''$ と同時に $A:B > A'':B''$ なりや、

$A:B < A':B'$，$A':B' < A'':B''$ と同時に $A:B < A'':B''$ なりや、

或は此最後の一問に代ふるに次のを以てすべし、

$A:B > A':B'$ と同時に $A':B' < A:B$ なりや。

例へば第二の問に答へんとするに、先づ $A:B > A':B'$ なりといふは $A:B > r > A':B'$ なる如き有理數 r の存在するをいふに外ならず、又 $A':B' > A'':B''$ は $A':B' > r' > A'':B''$ なる如き有理數 r' の存在を保證す。さて $r > A':B'$，$A':B' > r'$ より $r > r'$ を知り $A:B > r$，$r > r'$ より、第一定義によりて $A:B > r'$ を知る、之を $r' > A'':B''$ と併せ考へて果して $A:B > A'':B''$ なるを確む。其他類推すべし。

斯の如くにして凡ての場合に於て二つの比の相等、大小を定むることを得たり。

A、B が公約なき場合に於ける $A:B$ なる比の値は、即ち吾輩のこれより說明

せんとする無理数に外ならず。ユークリッドの比の定義より無理数の觀念に到達するは、實に一擧手一投足のみ。ユークリッドの比例論は實質に於て、現代数學に於ける数の觀念の凡ての要素を具へたり。数の觀念の完成とユークリッド比例論との間に、歴史が二千載の空隙を示せること、今にして之を想へば、實に奇異なりと謂ふべし。事實を知るは易し、其價値を批判するは難し。要は唯立脚點の昂上にあり。

(八)

(二)に擧げたる原則の未だ量の特性を盡さゞるを指摘せる後、而して此缺陷を補修するに先ち、前節に於て古希臘時代に於ける比の觀念を回顧したるは、以て現時に於ける数の觀念の由る所を明にせんと欲せるに外ならず。

吾人の所謂量に連續の性質あり、而して(二)に擧げたる量の連續に關する性質は、未だ其特徴を盡くさず、此缺陷は何處にか伏在せる。

抽象的の量を表はすに、直線の長短を以てし、更に一層明瞭なる形象を得んが

爲に、長さを直線上の點に對照せんとす。Oなる點に始まりて、限りなく一方に延長せる直線を考へ、或る一定の長さAを採り、OPを此長さに等しくして、P點を定め、以てAなる長さを、Pなる點に對照す。斯の如くにして個々の長さと此直線上の個々の點とを配合するときは、各の長さは或る定まりたる點によりて表はされ、又各の點は或る定まりたる長さを表はし且つ長さの大小は之を表はせる點の位置の左右によりて定まる。量に連續の性質ありといふは、直線上の點は連續せりといふに異ならず。直線上の點連續せりといふことは、明確にして動かすべからざるの觀ありと雖、さて此連續といへる觀念を分析して、之を最も明白なる言辭に表はさんことは甚だ難し。

O　E　P　D　Q

直線上に於て、例へばPよりQに移らんとするときはP、Qの中間の諸點を盡く通過せざるべからず、此等の點はPよりQに達すべき徑路を組成し、其間何處にも斷絶あることなし。分布の稠密といふことは、畢竟如何なる二點の

中間にも限りなく多くの點あるべきを明言するものなれば、此原則は一見點の連續を表明して餘蘊なきが如し。然れども其實際然らざるを覺ること容易なり。

今直線上隨意の一點*D*を除き去りたりとせよ、譬へば、理想的最鋭利のナイフを以て、*D*に於て此直線を切りたりとせよ、卽ち此切り目に幅なしと考へよ、斯の如くにして直線上點の連續は破壞せらる。然れども如何なる二點の中間にも必ず第三の點あるべしとの條件は、*D*を除去せる後にも、仍ほ依然として充實せらるゝにあらずや。是分布の稠密は未だ連續といふことの特徵たるに足らざるを證する者なり。

連續の觀念明白なるが如くにして、實は然らず。此微妙なる觀念を捕捉して、之に蔽ふ所なき光明を與へたるはデヽキンドの功績に歸す。デヽキンドは連續の意義を定めて曰く、

直線上の凡ての點を甲乙の二群に分ち、甲の群の點をして盡く乙の群の點

の左方に在らしむるとき、直線を斯の如く兩分する點は必ず、而も唯一個に限り存在す。

卽ちこゝに謂ふ所の直線の兩斷は次の性質を具へたり。

一、直線上の凡ての點は必ず甲又は乙の中いづれか一方、而も唯一方にのみ、屬す。

二、甲に屬する點は盡く乙に屬する點の左方にあり。

三、斯の如くするときは甲に屬する點の中最右に位する者唯一個あるか、或は乙に屬する點の中最左に位する者、唯一個あるか、何れか其一に居らざるを得ず。上文に所謂、直線を兩分する點とは之を云ふなり。

直線に此の如き兩斷を施こし得べきことは、何人も首肯する所なるべし、然れども「我讀者の多數は連續の秘密が平凡此の如きに過ぎずと、聽きて意外の感に打たるゝならん」とはデヾキンドの危惧せる所なりき。彼は更に語を繼ぎて言へらく、「人若し上文の原則を明白にして、少しも直線なるものに對する自

家の所觀に悖る所なしとなさば、我が幸之に過ぎず。如何にとならば予は此の原則の果して正當なるや否やを證明すること能はず、而も是れ何人と雖、成し得べからざる事に屬すればなり」と。讀者請ふ深く此語を翫味せよ。若し或は此原則の正否を論證せんと欲するの誘惑を感ぜば、先づ抑〻證明とは如何なる事なるかを想へ。證明なきは能はざるに非ず、能ふ可らざるなり。

デヾキンドの法則に準據して、一の有理區域が果して凡ての量を網羅せりや否やを批判するときは最透徹せる解答を得。

一の有理區域に屬せる凡ての量を兩分して之を甲乙の二群となし、甲の量をして盡く乙の量より小ならしめ、而も甲に最大の量なく、乙に最小の量なからしむるを得べきことは、既に說きたる所なり。然るに凡ての量の範圍內に於ては、斯の如き兩分に伴ひて必ず甲に最大の量あるか又は乙に最小の量あるを要するが故に、一の有理區域以外に尙ほ量なきを得ず。

デヾキンドの法則に於ける第三條件と(七)の切斷の第三條件と正反對なるこ

と、實に問題の要點なり。

分布の稠密なること、等分の可能なること、此等は凡て量の連續に關せる性質にして而も未だ連續の特徴を盡さず。此等の事實は實際盡く連續の法則の中に含蓄せらるゝこと、後章に至て自ら明白なるべし。

(九)

凡ての量に數値を與へんと欲せば、有理數のみを以て之を辨ずべからず。是に於て有理數以外新に數を作るの必要を生ず。斯の新數は卽ち無理數なり。所謂抽象的の量と、有理無理のあらゆる數(正數)とは、其内容に於て異なる所あるべからず。數はよく凡ての量の數値を供給すべし。

然れども吾人は又凡ての量に數値を與ふべしとの此要求を充實せる上、更に一步を進めて量の數値たり得ざる數をも考へ得べき自由を有すること論なし。例へば0の如し、量の本來の觀念に固着するときは、0は量の數値として用なき數なり。然れども數の系統の統一及び其の法則の調和の爲には0は缺く

べからず。

個々の量と一直線上の個々の點とを對照せしむるときは(前節の圖を看よ)直線上の各〻の點は必ず或量を代表せり。唯其左端の一點Oは則ち然らず。直線上の各〻の點を其代表せる量の數値に對照すれば、個々の點は個々の數に配合せらる、零なる數は0なる點に配合せらるゝものと考ふることを得べし。

抽象的量の性質は又數の盡く具ふる所なり、0を包括せる數の範圍内に於て次の諸原則成立す。

第一、二つの數は比較し得べし、其の結果は相等、大小の三者を出でず。數に一個最小の者あり、0卽ち是なり。

第二、數には組み合はせ及び交換の法則に遵へる加法を施すことを得、其結果唯一なり。0の加法は$a+0=a$によりて定まり、加法と大小との關係は$a>b$と$a+c>b+c$との相隨伴すべしといふに盡く。加法の轉倒(減法)は其可能なる限り、唯一の結果を與ふ。

第三、數の全範圍に連續あり。卽ち凡ての數をＯＵの二群に分ち。Ｏに屬する數をして凡てＵに屬する數より大ならしむるときは、Ｏに最小の數あるか、或はＵに最大の數あるか、二者いづれか其一に居らざるを得ず。

吾人は連續の法則を基礎として、次章に於て無理數の性質を闡明せんとす。上文擧ぐる所の原則は、完全に數の觀念を定むるものにして、此意義に於て、實に「數」の定義なりといふべし。第三章に於て整數の諸性質を根本的の原則より演繹せると同一の順序によりて、上述の諸原則より一般の數の諸性質を秩序的に導き出さんことは、蓋し數學に於て論理の嚴密を愛好する讀者の最も趣味あるを覺ゆべき問題なり。然れども吾人は後條に於て唯連續といふことの意義の實質的に確實に了解せられんことを期望するに止まり、卽ち問題の最重要なる一點を解釋して、其他は之を餘裕ある讀者の敷衍に一任せんと欲す。

第九章　無理數

限りなく多くの數、上限及下限○基本定理○稠密なる分布、等分の可能、アルキメデスの法則は凡て連續の法則に含蓄せらる○有理數の兩斷と無理數○無理數の展開、無限小數の意義○量を計ること及其數値の展開○展開せられたる數の大小の比較、展開の唯一なること○無理數の加法及其性質○加法の近似的演算○比例に關する定理、比例式解法、乘法及除法の意義○乘法及除法の性質○負數

(一)

限りなく多くの數の與へられたる時は、其中に一個最大又は最小の者存在するを必すべからず。此微妙なる事實は常識を以て捕捉し難き所なれども、數學に於て頗る重要なる意義を有せり。抑「限りなく多し」とは、吾人の實在界に於て決して遭遇せざる所なり。吾人は「甚だ多し」といふことを經驗し得べし。限りなく多しといふは、唯思想界に於てのみあり得べきことなり。是故に無限

といふことにつきては往々一見常識に反せるの觀を呈する事實に遭遇すること、實に止むを得ざる所なり。

限りなく多くの物を考ふといふことの意義、明白に理會せられざる可らず。限りなく多くの物を考ふとは雜然として隨意に種々の物を思ふの謂にあらずして、一定の限界ある、物の一系統を考ふるなり、唯此系統を組成せる物の數に限なきのみ。卽ち或物が今考へつゝある所の系統に屬せるか、或は屬せざるかを定むべき一定の照準存在するを要す。此照準は場合によりて樣々に異なるを得べきこと論なし。例へば凡ての整數を考ふるときは、吾人は限りなく多くの物を考ふとは雖、此等の物は全體に於て、一定して動かすべからず。1を採り2を採る、$\frac{1}{2}$を採らず、$\frac{1}{3}$を採らず、今考へつゝある物に一定の限界ありといふは此意なり。或は凡ての素數を考ふるとき亦然り。如何なる數も素數なるか、或は素數ならざるか、何れか一なり。素數は今考ふる所の系統に屬し、素數ならざる數は之に屬せず。吾人の考ふる所の物に定まれる限界あり。或は

又2より大にして3より小なる凡ての有理數を考ふ、又は1より小なる凡ての有限小數を考ふ、又は循環位數二個なる凡ての循環小數を考ふ。考ふる所の物の數に限なしと雖、考ふる所の物の限界は一定して動かすべからず。

さて冒頭に言へる事實に返らん。定まれる數の一組を考ふるとき、其中に最大の者ありとは、次の二條件を充實すべき數 n の存在するを言ふ、第一今考へつゝある所の數の中に n より大なるもの一も在ることなし、第二、n なる數自らも亦今考ふる所の數の一組に屬せり、といふこと是なり。最小の場合も亦同じ。

考ふる所の數が唯 n 個に止まれるときは、其中に必ず最大又は最小の者あり。例へば其最大の者を得んと欲せば、次の如くすべし。先づ今考ふる所の n 個の數の一組を S と名づく。S の中より任意に一つの數 a を採り出すとき、a 若し殘れる $n-1$ 個の數のいづれよりも大なるときは a は卽ち S の諸數の中最大なる者なり。若し然らずば殘れる $n-1$ 個の數の中に a より大なる者

存在す。此場合には此等の $s-1$ 個の數を一括して之を s_1 と名づく。s_1 に最大の數あらば、そは又 s の最大の數なり。斯の如くにして n 個の數の中最大なる者を求むる手續きは、$s-1$ 個の數の場合に歸着す。さて唯二個の數の與へられたるとき、其中に最大なる數あること分明なるが故に、數學的歸納法によりて、n が如何なる數なりとも、最大の存在は證明せられたり。

こゝに「n が如何なる數なりとも」といへるは、「s を組成せる數限りなく多くとも」といふことゝ同一にあらざるに注意すべし。「n が如何なる數なりとも」とは「s を組成せる數の數に限りある凡ての場合に於て」といふの義なり。s が2個の數より成れる場合には s に最大の數あり。よりて上の論法によりて s が3個の數より成れる場合にも亦最大の數あるべきを知る。s が3個の數より成れる場合に最大の存在すべきを知らば、再び同様の論法によりて s が4個の數より成れる場合に移る。然れども斯の如き徑行によりて s が無限に多くの數より成れる場合には、決して到達することを得ず。

無限に多くの數の與へられたる時、其中に最大又は最小の者あるを必すべからざるを知らんと欲せば、最大の存在せざる場合の唯一個の實例を擧ぐるを以て足れりとすべし。例へば n を以て自然數を表はし $1-\frac{1}{n}$ 即ち $\frac{n-1}{n}$ の如き數の全體を考へ、之を一括して s と名づくるに s は無限に多くの數より成れる、而も一定の限界を有する數の一系統なり。0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ……等は此系統に屬す。$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$ 等は然らず。さて s に最大の數あるか。s の中より如何なる一つの數を採るとも、s の中には尙ほ之よりも大なる數あり。例へば $1-\frac{1}{n}$ は s に屬せり、然れども $1-\frac{1}{n+1}$ も亦 s に屬して、而も $1-\frac{1}{n}$ より大なり。是故に s に最大の數あるを得ず。1 は s の凡ての數より大なれども、1 は s に屬せず、$1=1-\frac{1}{n}$ なる如き自然數存在せざればなり。

s が無限に多くの、定まる數の一系統なるときは、s に最大又は最小の數あることあるべしと雖、最大又は最小の數なき場合も亦之あること、上の一例によりて確められたり。更に一個の例を加へん、1 より大なる凡ての分數を一括

して之を s と名づくれば、s に最小の數なし。1より小ならざる凡ての數を一括して之を s となせば、s には最小の數あり、1卽ち是なり。前の場合にては1は s に屬せず、後の場合にては1は s に屬せるに注意すべし。

最大、最小に似て而して非なるを上限、下限とす。s なる一組の數の與へられたるとき s の上限とは次の二條件を充實すべき數 λ を謂ふ。

第一、s に屬せる數にして λ より大なる者一も存在せず。

第二、λ より小なる數 λ' を如何に採るとも、s に屬せる數にして λ' より大なる者必ず存在す。

下限の場合には大小の語を轉倒すべし。此處に λ の s に屬すると、屬せざるとは措て問はず。s の諸數を以て窮りなく其上下限に接近することを得、然れども s の諸數は決して其上限を超えず、又其下限を下らず。

最大又は最小の存在する場合には、こは卽ち上限又は下限なり。然れども上限、下限は必ずしも最大又は最小にあらず。λ が s に屬するときは、λ は最大又

は最小なり、x が S に屬せざるときは S に最大又は最小なし。

前出の例につきて說明せんに、先づ S を $1-\frac{1}{n}$ の如き分數の全體となすときは、S に最大なし。1 は S の上限なり。げにも S の諸數の中 1 より大なるものなし、又 x を 1 より小なる數なりとせば $1>1-\frac{1}{n}>x$ なる如き自然數 n は必ず存在す、例へば $x=0.99999$ とせば $1-\frac{1}{100000}$, $1-\frac{1}{1000000}$, ……等は S の數にして x より大なり。

S の最小、隨て S の下限は 0 なり。

又 S は 1 より大なる凡ての數より成れりとせば、S に最小なし。1 は S の下限なり。S が 1 より小ならざる凡ての數より成れるときは、S の最小、隨て S の下限は卽ち 1 なり。

正の有理數に最小なし、0 は其下限なり。負の有理數に最大なし、0 は其上限なり。最大最小と上限下限との區別は煩瑣なるに似たりと雖、此等の觀念は前にも言へる如く現代數學に於て重要なる意義を有す。こゝには唯此觀念を明

晰に說明せんが爲に、最卑近なる例を採れるなり。

（二）

上限下限の語を說明せる後、進みて次の定理を證明せんとす。

限りなく多くの定まりたる數の一組の與へられたるとき、若し此一組の數が盡く、或一定の數 a より小なるときは、此一組の數は a より大ならざる上限を有す。

若し又此一組の數が盡く或定まりたる數 b より大なるときは、此一組には b より小ならざる下限あり。

此定理は有理數の範圍内にては必ずしも成立せず。之を證明するには連續の法則を根據とせざるべからず。こゝには第一の場合のみを論ぜん、第二の場合も其趣異なることなし。

先づ與へられたる一組の數を S と名づく。今任意に或數 x を採りて考ふるに、茲に二つの場合あり。卽ち x は S の如何なる數よりも大なるか、然らずば S

の數にして x より小ならざる者存在す。第一の場合には x を O に編入し、第二の場合には x を U に投じ、以て凡ての數を O U の二群に分つことを得。斯くするときは如何なる數も O 又は U のいづれか唯一方に屬し、又 O に屬せる數は、盡く U に屬せる數よりも大なり。是故に連續の法則によりて、O に最小の數あるか、又は U に最大の數あるか、いづれか一ならざるを得ず。いづれにしても、卽ち g は O の最小の數なりとするも、又は U の最大の數なりとするも、g は S の上限なり。之を證すること次の如し。

先づ O U の構成上、S の諸數の盡く U に包括せらるゝこと明白なり。若し U に最大の數あらば、此數 g は又 S の最大の數なり。げにも g は U に屬せるが故に、S の數の中 g より大なる者又は g に等しき者必ずあるべし。さて實際 S には g より大なる數なし、何となれば若し m を S の數にして g より大なる者なりとせば、m は又 U に屬し、隨て g は U の最大の數なるを得ざるべければなり。是故に S の諸數の中に g に等しき者なかるべからず、而も又 S に

はgより大なる數なきが故に、gは卽ちsの最大の數なり

又gが$\mathbf{O}$の最小の數なるときは、gは$\mathbf{O}$に屬するが故にsの諸數の中gより大なる者一もあることなし、今mを以てgより小なる數となすときはmは$\mathbf{U}$に屬し、隨てsの諸數の中mより小ならざる者必ずなかるべからず、而も實際sの諸數の中mより大なる者必ずあり、げにも若しsの諸數にして盡くmを超えずばmはsの最大の數にしてmより大なる數は盡く$\mathbf{O}$に屬し、隨て$\mathbf{O}$に最小の數あるを得ざるべきなり。卽ちgは第一sの凡ての數よりも大にして、又第二にgより小なる數mとgとの中間にはsに屬せる數を容れたり。是故にgはsの上限なり。

gが$\mathbf{U}$の最大の數なるときは、gは卽ちsの上限にして同時にsの最大なり。又gが$\mathbf{O}$の最小の數なるときは、gはsの上限にして此場合にはsに最大なし。

sの凡ての數より大なりといふaなる數は$\mathbf{O}$に屬せるが故に、gは凡ての場

合に於て a より大なることを得ず。凡ての數を O、U の二群に分つことを得といへること、實は a なる數の存在を根據とせり。

又 g の外に S の上限なきこと明白なり。例へば g_1 を以て g と異なる數なりとするに、g_1 にして g より小ならば g_1 は U に屬し、且 S の數の中 g_1 より大いなる者存在するが故に、g_1 は既に上限の第一條件をも充實せず。又 g_1 にして g より大ならば S の諸數の中 g より大なる者なきにより、g_1 は上限の第二條件を充實せず。卽ち g と異なる數は S の上限として g と幷立することを得ず。如何なる場合に於ても上限、下限は假令存在すとも、必ず唯一個に限るべきなり。

下限の場合につきて、上の證明を反復すること、上下限及び最大小の明確なる觀念を獲得するに絶好の練習たるべし。

例へば其平方 2 を超えざる凡ての有理數を以て S を組成するに、S の諸數はいづれも例へば $\frac{3}{2}$ より小なり。是故に S は $\frac{3}{2}$ を超えざる上限を有す。

(此上限は有理數にあらず。) **O**、**U** が連續の法則に謂ふ所の數の兩斷なるときは、**O** に最小の數あらば、そは **U** の上限にして、又 **U** に最大の數あらば、そは **O** の下限なり。

(三)

分布の稠密なること、等分の可能なること、及びアルキメデスの法則、此等は數の連續に關係せる性質なりと雖も、未だ連續の眞相を悉さゞるものなることは既に指摘せる所なり。今翻て此等の諸性質の盡く連續の法則の中に含蓄せらるゝを辯ぜんとす。

一、a、b が相異なる二つの數なるときは、a b の中間に第三の數必ず存在す。

證、a、b は相異なるが故に第一原則一によりて、其中一は他の一より大なり。例へば a を b より大なりとなすに、假に a より小にして b より大なる數なしとせば、次の如くにして自家撞着の結論を生ず。a 及び a より大なる凡ての數を **O** に編し、b 及び b より小なる凡ての數を **U** に編するとき、a、b の

中間に第三數を容れずとなせるが故に、0、U は其全體に於て凡ての數を網羅し、且0の數は凡てUの數より大なり。然るに a は0の最小の數にして、同時に又 b はUの最大の數なり。是連續の法則と相容れざる所なり。

二、アルキメデスの法則、a 若し b より大ならば b を幾回か加へ合はせて、竟に a より大なる數に達することを得。

b を幾回か加へ合はせて作り得べき數卽ち b の倍數 b $2b$ $3b$……を一括して之を s と名づく。アルキメデスの法則を否認するは、s の諸數盡く a を超えずと主張するに異ならず。若し果して然らば s には a より大ならざる上限あり、之を g と名づく。さて上限の第二條件によりて $g-b$ なる數よりも小ならざる數 s の中になかるべからず、例へば $nb \geqq g-b$ となすに $(n+1)b \geqq g$ よりて確に $(n+2)b > g$ にして、而も是 g の定義に牴觸せり。アルキメデスの法則を承諾すること已むべからず。

アルキメデスの法則より剩餘の定理を得べし。a が b より大なる數なるとき

は b の倍數にして、a より大なる者あり、随て b の倍數にして a より大ならざる者は其數限りあり、故に其中一個最大の者存在す、之を qb となさば

$$qb \leqq a < (q+1)b$$

随て、

$$a = qb + r, \quad b > r \geqq 0$$

にして a、b の與へられたるときは、q 及び r は一定す。

等分の可能を證せんが爲に、先づ次の事實を辨明せざるべからず。曰く、a なる數 $(a \neq 0)$ と自然數 n とを與ふるとき $a > nx$ なる如き數 x は必ず存在す。此事實は連續の法則に關係なし。先づ此定理は n が 2 なる場合に成立す、げにも a より小なる數の一つを b となすに、b よりも又 $a-b$ よりも小なる數必ずあり、其一つを c とせば $a > c$, $a-b > c$ よりて $a > 2c$ さて數學的歸納法を適用せんが爲に n の場合より $n+1$ の場合に移らんに、先づ $a > nc$ なる數 c の存在を假定し、$(n+1)c$ を作るとき $a \geqq (n+1)c$ なる場合

は辯を俟たず。若し $(n+1)c > a$ ならば $(n+1)c - a = d$ と置くに、$c > d$ さて $c - d = c'$ となさば $(n+1)c' = (n+1)c - d - nd < (n+1)c - d = a$ 即ち c' の $n+1$ 倍は a よりも小なり。是によりて當面の定理は凡ての場合に成立せり。

三、a と自然數 n とを與ふるとき $a = nb$ なる數 b は必ず存在す。

$a \geqq nx$ なる如き數 x の存在すべきことは、只今證明せる所なり。斯の如き數 x を總括して之を S と名づく。S の諸數は一も a を超えず、故に S に上限あり、之を g と名づく。さて g の n 倍は a に等しく、即ち $a = ng$ なり。げにも先づ、g の n 倍は a より小ならず、何とならば若し $a > ng$ ならば $a - ng > n\delta$ なる如き數 δ は必ず存在す、隨て $a > n(g+\delta)$ 即ち g より大なる數 $g+\delta$ が S に屬せりとの不都合なる結論に陷る。又 g の n 倍は a より大ならず、何とならば若し $ng > a$ ならば $ng - a > n\varepsilon$ にして且 $g > \varepsilon$ なる如き數 ε は必ず存在す。隨て $n(g-\varepsilon) > a$ さて $g - \varepsilon$ は S に屬する數なり、此數の n 倍 a

より大なりとは不可有の事に屬す。g の n 倍は a より小ならず、又 a より大ならず、是故に數の第一原則によりて g の n 倍は a に等しからざるを得ず。其 n 倍 a に等しき數の g を外にして存在し得ざること明白なり。

（四）

有理數の分布は稠密なり。a、b を二つの相異なる有理數とせば、a b の中間必ず第三の有理數を容る。此事實は更に之を修補することを得。α、β を相異なる二つの數とせば（α、β が有理數たると、然らざるとを論ぜず）α、β の中間に**有理數**必ず存在す。

げにも、例へば $\alpha>\beta$ となすときは、アルキメデスの法則によりて $n(\alpha-\beta)>1$ なる如き自然數 n は必ず存在す。随て $\alpha-\beta>\frac{1}{n}$ さて n を分母とせる正の分數の中 β より大ならざる者は其數に限りあり、就中最大なるを $\frac{m}{n}$ となすに $\frac{m+1}{n}>\beta$ にして、此 $\frac{m+1}{n}$ なる有理數は α より小なり。如何にとならば、若し假に $\frac{m+1}{n}\geqq\alpha$ なりとせば $\frac{m+1}{n}\geqq\alpha>\beta\geqq\frac{m}{n}$ より $\frac{1}{n}\geqq$

$r-n$ を得べくして、是上に述べたる n の定義と相容れざる所なり。n、n' の中間に必ず有理數の存在するを知るべし。是によりて、又 n、n' の中間に無限に多くの有理數の存在するを推知すべし。

有理數を甲乙の二群に分ち、甲の數をして盡く乙の數より大ならしむるとき、甲に最小の有理數なく、又乙に最大の有理數なくば、斯の如き有理數の切斷は、或一個の定まりたる無理數によりて惹き起さるべし、卽ち甲の凡ての有理數よりも小にして、乙の凡ての有理數よりも大なる唯一個の無理數あり。

甲の有理數はいづれも乙の或有理數より大なるが故に、甲に下限あり、之を r と名づく、又乙の有理數はいづれも甲に屬せる或有理數より小なるが故に、乙に上限あり、之を r' と名づく。さて r、r' は相等しく、隨て此數は卽ち甲乙の中間に存せる有理數の缺陷を塡補すべき唯一の無理數なり。げにも先づ $r' < r$ なることを得ず、若し $r' < r$ ならば $r' < r'' < r$ なる有理數存在し、此有理數は r より小なるが故に甲に屬することを得ず、又 r' より大なるが故に乙に屬

することを得ず、是許すべからざる事なり。又 $r_1<r_2$ なることを得ず、若し假に $r_1<r_2$ なりとせば r_1、r_2 の中間に横はれる二つの有理數をとりて之を r、r' と名づけ、r' を r より大なりとせば $r_1<r<r'<r_2$ にして r は r_1 より大なるが故に甲に屬し、r' は r_2 より小なるが故に乙に屬し、而も r は r' より小なり。是はた容すべからざる事に屬せり。是故に r_1、r_2 は相等しからざるを得ず。$r_1=r_2=\lambda$ と置くとき、λ 以外に甲の凡ての有理數より小にして、乙の凡ての有理數より大なる數あることなしといふ事實は既に上文説明中より看取することを得べき者なり。こゝに尙ほ次の事實を附記して思想の明確に資せんとす。

如何程小なる數にてもよし、豫め ε なる數を任意に定め置かんに、甲、乙兩群の中より一對の有理數 a、b を撰みて $b-a<\varepsilon$ ならしむることを得。$\frac{\varepsilon}{2}$ をとり $\lambda+\frac{\varepsilon}{2}$ を考ふるに λ と此數との中間に在る有理數は盡く甲に屬せり、此等の有理數の中の一つを a とす。又 λ が $\frac{\varepsilon}{2}$ より大なるときは λ と

$\lambda - \frac{\varepsilon}{2}$ との間に在る有理數は盡く乙に屬せり、其一つを b となすに、$\lambda + \frac{\varepsilon}{2} > b > \lambda > a > \lambda - \frac{\varepsilon}{2}$ よりて $b - a < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$ 斯の如くにして a、b の如き一對の有理數を甲乙兩群より一つ一つ撰み出すべき方法は無限に之あり。

λ が $\frac{\varepsilon}{2}$ より大ならざる場合は辨明を要せざるべし。

如上の觀察によりて次の事實を知る。

凡て無理數は有理數間に一の切斷を惹き起し、又有理數間の切斷は一の無理數を定む。屢說きたる有理數の缺陷は各、唯一個の無理數によりて塡補せらる。是故に有理數に一の切斷を與へて其缺陷を指示する每に、一個の無理數の存在、證明せられたりと謂ふことを得。

(五)

u を或無理數となし、t を 1 より大なる自然數(例へば $t = 10$)とし、t を基數とせる命數法によりて u を表さんとす。

先づnを任意の自然數となし、nを分母とせる正の分數$\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ……を考ふるに、此等の分數の中aより小なる者は其數に限あるべきこと、アルキメデスの法則の當然の結果なり。さて此等の分數の中最大なる者を$\frac{m}{n}$と名づくるに

$$\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$$

にして

$$a = \frac{m}{n} + \rho \qquad \rho < \frac{1}{n}$$

今順次nを1、t、t^2、……となして、此結果を適用し

$$r_0 = m_0 < a < m_0 + 1$$

$$r_1 = \frac{m_1}{t} < a < \frac{m_1+1}{t}$$

$$r_2 = \frac{m_2}{t^2} < a < \frac{m_2+1}{t^2}$$

………………

$$r_k = \frac{m_k}{t^k} < a < \frac{m_k+1}{t^k}$$

…………

によりて有理數 $r_0, r_1, r_2, \ldots$ を定むるに、此等は皆 a と共に全く一定す。さて $m_0 = \frac{m_0 t}{t} < a$ なるにより $m_0 t \leqq m_1$ 又 $a < \frac{(m_0+1)t}{t}$ なるが故に $m_1 < (m_0+1)t$ 即ち

$$m_0 t \leqq m_1 < m_0 t + t$$

$$m_1 = m_0 t + c_1 \qquad c_1 < t$$

同樣にして

$$m_2 = m_1 t + c_2 = m_0 t^2 + c_1 t + c_2 \qquad c_2 < t$$

一般に

$$m_k = m_{k-1} t + c_k = m_0 t^k + c_1 t^{k-1} + \cdots\cdots + c_k, \qquad c_k < t.$$

隨て

$$r_k = m_0 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots\cdots + \frac{c_k}{t^k}$$

斯の如くにして a より m_0 及び c_1、c_2、……c_k…等、限りなき係數の引き續きを定むることを得、r_k は a より小なれども、其差 $\frac{1}{t^k}$ より小なり、是故に r_k は a の値を $\frac{1}{t^k}$ まで與ふるものなりとすべし。

言辭を簡約して、この結果を次の如く言ひ表はす。a を t の冪級數に展開して、或は t を基數とせる命數法にて表はし

$$a=(m_0,\ c_1\ c_2 \ldots\ldots c_k \ldots)$$

を得。t の與へられたる上は、各の無理數は唯一の展開を有せり。

上述の展開は a が無理數ならざるときにも亦適用し得べきこと勿論にして、a が有理數なるとき、其展開を得べき方法、其展開の係數が竟に一定の週期を以て循環するに至るべきこと、及び特殊の有理數は有限、無限二樣の展開を有し得べきことは既に第六章(七)(八)に於て説きたる所なり。

若し逆に、始より m_0、c_1、c_2……等限りなき係數の引續きを與ふるとき(c は盡く t より小なる自然數なるべきこと勿論なり)

$(m_0, c_1, c_2, \ldots\ldots c_k \ldots\ldots)$

の如き展開を與ふべき數は必ず存在すべしや、否や。

展開の有限なる場合、及び其係數の循環する場合は既に結着せる問題として、こゝに之を度外に置きて可なり。さて前の如く

$$r_k = m_0 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \ldots\ldots + \frac{c_k}{t^k} = \frac{m_k}{t^k}$$

なる有理數を作り、此等無限の有理數 r_0、r_1、r_2 ……を一括して之を R と名づくるに、R の諸數は盡く m_0+1 より小なること明白なり。是故に(二)によりて R は一の上限を有す、之を r と名づく。r は即ち上記の展開を與ふべき數なり。之を確めんと欲せば、凡ての k につきて

$$\frac{m_k}{t^k} < r < \frac{m_k+1}{t^k}$$

なるべきを示さば則ち足る。先づ r は R の上限にして r_k は k と共に增大するが故に $r_k < r$ なること明白なり。今假に $r > \frac{m_k+1}{t^k}$ となさば、上限の定義によりて、R の中には $\frac{m_k+1}{t^k}$ より大なる數なかるべからず、然れども其實

際然らざることは、容易に確め得べき所なり。げにも

$$r_0 \leqq r_1 \leqq r_2 \cdots \leqq r_{k-1} \leqq r_k < \frac{m_k+1}{t^k}$$

$$r_{k+n} = r_k + \frac{c_{k+1}}{t^{k+1}} + \cdots\cdots + \frac{c_{k+n}}{t^{k+n}} < r_k + \frac{t-1}{t^{k+1}} + \frac{t-1}{t^{k+2}} + \cdots + \frac{t}{t^{k+n}} = \frac{m_k+1}{t^k}$$

にして r_0、r_1、$r_2 \cdots\cdots$ は其附數 k より小なると大なるとを問はず、いづれも $\frac{m_k+1}{t^k}$ より小なり。

若し又

$$r'_0 = m_0+1 = r_0+1$$

$$r'_1 = \frac{m_1+1}{t} = r_1+\frac{1}{t}$$

$$r'_2 = \frac{m_2+1}{t} = r_2+\frac{1}{t^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r'_k = \frac{m_k+1}{t^k} = r_k+\frac{1}{t^k}$$

によりて定めらるゝ無限の有理數 r'_0、r'_1、$r'_2 \cdots\cdots$ を一括して之を R' と名づくれ

ば、R' の諸数は盡く m_0 より大なるが故に、R' は一の下限を有す。之を r' と名づくるに r' は R の上限 r と同一の数なり。其故如何にといふに、先づ

$$m_0 \leqq m_1 \leqq \ldots\ldots \leqq m_n \ldots\ldots < r < \ldots\ldots \leqq n_n \ldots\ldots \leqq n_1 \leqq n_0$$

なることは既に說きたり。今又 r' を n_0、n_1、…n_n…の下限となせるが故に、r' は n_0、n_1…n_n…のいづれよりも小なる數の上限なり、故に $r \leqq r'$ なること既に確實なり。今更に $r < r'$ なるを得ざるを證明せんに、假に $r < r'$ なりとせば $p(r'-r) > 1$ なる如き自然數 p はアルキメデスの法則によりて必ず存在す、よりて $10^n > p$ なる如く指數 n を定めて $r'-r > \frac{1}{10^n}$ を得。さて一方に於て

$$m_n < r < r' < n_n = m_n + \frac{1}{10^n}$$

より $r'-r < n_n - m_n = \frac{1}{10^n}$ を得て、こゝに前後矛盾の結論を生ず。$r < r'$ なりとの主張は保持すべからず、$r = r'$ は必至なり。

上文の觀察は要するに次の事實に歸着す。m_0、c_1、c_2、c_3……を豫め與へて、之より前に述べたるが如くにして

なる二組の有理數を作るときは R の上限 r と R' の下限 r' とは同一なり。此

$$R:\quad r_0,\ r_1,\ r_2,\ldots\ r_n,\ldots\ldots$$

$$R':\quad r'_0,\ r'_1,\ r'_2,\ldots\ r'_n\ \ldots\ldots$$

$r = r'$ なる數は卽ち

$$(m_0,\ c_1\ c_2\ldots\ldots\ c_n\ldots\ldots)$$

なる展開を與ふべき者なり。

例へば 3.141592……の如き展開(無限小数)與へられたりとせよ。常識は此記法の或數を表せるを認めて怪まず。然れどもこの記法は其最後に連なれる「……」によりて、桁數の連綿究まる所なきを示せるが故に、有限小數が或數を表はすといふと同じ意義に於ては、上の記法は或數を表はすことなし。然らば則ち此記法の表せるは如何なる數ぞや。上文の觀察は此疑問に明確にして動かすべからざる解釋を與ふ、曰く上の記法は

$$r_0 = 3;\quad r_1 = 3.1;\quad r_2 = 3.14;\quad r_3 = 3.141;\quad r_4 = 3.1415;\ \ldots\ldots$$

等の有限小数(其數には限なけれども)のいづれよりも大なる、而して又

$$x'_0 = 4;\quad x'_1 = 3.2;\quad x'_2 = 3.15;\quad x'_3 = 3.142;\quad x'_4 = 3.1416;\ \ldots\ldots$$

等の有限小數のいづれよりも小なる(唯一個に限り存在し得べき)數を表はせるなり。

(六)

前節の觀察は、無限小數を以て數を表はすといふ事を分析して、之に透徹せる解釋を與へたる者なれども、數の觀念を根本的に會得すべき此好機を充分に利用して遺憾なからしめんが爲に、更に數言を費すの必ずしも無益ならざるべきを信ず。

具象の量、例へば長さを計ることよりして、無限小數の觀念に到達する徑路は甚だ明なり。今 PQ なる直線を與へられたりとし、之を A と名づけ、單位 E を定めて之を計り、先づ

$$m_0 E < A < (m_0 + 1) E$$

なるを知り、次に E より短かゝるべき剩餘 $A_1 = A - m_0 E$ をば $\frac{E}{10}$ を單位として計りて

$$c_1 \frac{E}{10} < A_1 < (c_1 + 1) \frac{E}{10}$$

を得、次には又 $\frac{E}{10^2}$ を單位として剩餘 $A_2 = A_1 - c_1 \frac{E}{10}$ を計りて

$$c_2 \frac{E}{100} < A_2 < (c_2 + 1) \frac{E}{100}$$

を得、次第に斯の如くして

$$A = m_0 E + c_1 \frac{E}{10} + c_2 \frac{E}{100} + \cdots\cdots$$

を得。例へば尺を單位として A の長さ m_0 尺有餘、次に尺を十分して寸となし、剩餘 c_1 寸有餘、又更に寸を十分して分となし、此剩餘 c_2 分有餘となす、分を十分して厘、厘を十分して毛となし、此手續きを繼續するに、剩餘は漸次減少して、實際に於ては、竟に人の感覺によりて識別せらるゝの範圍を逸するに至るべく、又實用上斯の如き微小の剩餘に注意すべき必要なしと雖、吾人の理想

に於ては、上述の手續きは剩餘の存するに限り、何處までも繼續し得らるべしと考ふるを禁ずる能はず。又斯の如くにして順次得來るべき m_0、c_1、c_2、c_3……等の自然數は A、E と共に一定すべきを疑はず。卽ち c_k は k が稍〻大なるときは實際決定し難しと雖、其決定せられざるを、吾人の感覺の鈍き、或は計測の器械の不全に歸し、若し c_k にして決定せられ得なば、c_k なる自然數は一定の自然數なるべきを信じて躊躇することなし。A' にして少しにても A と異ならば、E を單位として A' を計るとき、最初は前と同一の數 m_0、c_1、c_2……を得ることあるべしと雖、竟には例へば $\frac{E}{10^k}$ の段に於て前の c_k と異なる自然數 c_k' に達せざるを得ず、隨て單位 E の定まりたる上は、各〻の長さ A より一定せる自然數の引き續き、m_0、c_1、c_2……を得。卽ち A の數値は $(m_0, c_1c_2 \ldots\ldots c_k \ldots\ldots)$ なる無限小數によりて與へらるゝものとなす。

如上は、常識ある人士の必ず所觀を一にすべき所なり。さて既に斯の如くにして各〻量に一定の有限又は無限小數を以て表はさるべき數値あるを認めたる

後、茲に新に一の疑問を生ず。A なる量、例へば PQ なる長さの先づ與へられたるときは斯の如くにして m_0、c_1、c_2……なる自然數の引續きを定め得べしと雖、若し此順序を轉倒し、始めより m_0、c_1、c_2……等限りなく自然數の引續きを與ふるとき

$$A = m_0 E + c_1\frac{E}{10} + c_2\frac{E}{100} + \cdots\cdots + c_k\frac{E}{10^k} + \cdots\cdots$$

の如き數値を得べき量 A は存在すべしや否や。m_0、c_1、c_2……は與へられたるが故に m_0E, $c_1\frac{E}{10}$, $c_2\frac{E}{100}$……$c_k\frac{E}{10^k}$……等は既に定まれる量なり、此等の量より加合によりて

$$A^{(0)} = m_0E,$$

$$A^{(1)} = m_0E + c_1\frac{E}{10},$$

$$A^{(2)} = m_0E + c_1\frac{E}{10} + c_2\frac{E}{100},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{(k)} = m_0E + c_1\frac{E}{10} + \cdots\cdots + c_k\frac{E}{10^k}$$

等の量を作り得べし、然れども此等の量は未だ求むる所の A なる量にはあらず。例へば

P　　$Q^{(0)}$　$Q^{(1)}$　$Q^{(2)}$　$Q^{(k)}$　Q

$PQ^{(0)}=A^{(0)}$, $PQ^{(1)}=A^{(1)}$, $PQ^{(2)}=A^{(2)}$, ……$PQ^{(k)}=A^{(k)}$ なる如き點、$Q^{(0)}$ $Q^{(1)}$ $Q^{(2)}$……$Q^{(k)}$ の存在は明白なり、k を一萬となし、一億となして、$Q^{(k)}$ の如き點を作りたりとも、今求むる所の Q なる點、卽ち $PQ=A$ なる如き點は常に $Q^{(k)}$ の右方にあり。卽ち知る、m_0E, $c_1\frac{E}{10}$, $c_2\frac{E}{10^2}$, ……$c_k\frac{E}{10^k}$ 等既知の量を加合し行きては、到底 A なる量に到達する時あるべからざるを。然らば卽ち A なる量、Q なる點は果して存在し得べしや否や。

實際に於て吾人は理想上 Q 點の存在を認む、然れども其根據は何處にかある。Q 點の存在を認むるは卽ち直線上の點の連續を認むるなり。前節に於て 7 の存在を證明するに R の上限の存在するを基礎とし、而して上限の存在は連續

の法則を根據とせることに着眼すべし。連續の法則は「公理」なり、證明せられ得べき事實にあらずと言へる所以の者、亦實にこゝに存せり。

有理數は有限小數又は循環小數に等し。循環せざる無限小數をも亦一個の數となすは、卽ち無理數の存在を認むるなり。吾人の考へ得べき有限、無限、循環、不循環の凡ての小數を總括して之を數と名づくるも、或は又數は連續の法則に遵ふといふも、歸する所は一なり。前者は經驗に基きて不知不識の間に常識の作り出せる數の觀念にして、後者は嚴格なる論理によりて此觀念を分析して得たる數の定義(の一要素)なり。

(七)

展開せられたる二つの數、卽ち例へば十進命數法にて書き表はされたる二つの數、a、a' の大小は一見して判別せらるべし。

$$a = (m_0,\ c_1 c_2 \ldots\ldots c_n \ldots\ldots)$$

となし、例の如く

$$r_k=\frac{m_k}{t^k}=m_0+\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\cdots\cdots+\frac{c_k}{t^k};\quad r_k'=\frac{m_k+1}{t^k}$$

なる記法を用ゐ、又

$$\bar{\alpha}=(\bar{m}_0\ \bar{c}_1\ \bar{c}_2\cdots\cdots\bar{c}_k\cdots\cdots)$$

につきて $\bar{r}_k$、$\bar{m}_k$、$\bar{r}_k'$ を同樣の意義に用ゐるとき、直に最一般なる場合を論ぜんが爲に α $\bar{\alpha}$ の展開は其起首若干項に於ては全く符合し、$\frac{1}{t^k}$ の位に至て始めて相異なる係數を有せりとし、例へば $c_k>\bar{c}_k$ となす。しかするときは

$$c_k\geqq\bar{c}_k+1,\quad r_k\geqq\bar{r}_k+\frac{1}{t^k}=\bar{r}_k'$$

さて $\bar{\alpha}$ は $\bar{r}_0'$、$\bar{r}_1'$ …… $\bar{r}_k'$ …… の下限なり、是故に $r_k\geqq\bar{r}_k'$ より $r_k\geqq\bar{\alpha}$ (1) を得。又一方に於て α は r_0、r_1 …… r_k …… の上限なり、隨て $\alpha\geqq r_k$ (2) (1) (2) より一般に

$$\alpha\geqq\bar{\alpha}$$

を得。只(1)(2)に於て同時に等號を採るべきときに限り $\alpha=\bar{\alpha}$ なり。此場合には $\alpha=\bar{\alpha}=r_k$ にして α 卽ち $\bar{\alpha}$ は有理數なり。是卽ち第六章(九)に說きたる特

異の場合に外ならず。今再び此特異の場合を審明せんが爲に、先づ(1)に於て等號を採るべき場合を考へんに、こは $r_k = \bar{r}_k$ 即ち $c_k = \bar{c}_k + 1$ にして且 $\bar{r}_k = a$ 即ち $\bar{r}_0, \bar{r}_1 \ldots\ldots \bar{r}_k \ldots\ldots$ の下限たるべき $\bar{a}$ が同時に、其最小たるときに限れり、是故に $\bar{r}_k = \bar{r}_{k+1} = \bar{r}_{k+2} = \ldots\ldots$ 随て（$t = 10$ の場合につきて言はゞ）$\bar{c}_{k+1} = 9, \bar{c}_{k+2} = 9 \ldots\ldots$ 即ち $\bar{a}$ の展開の係數は $\frac{1}{t^k}$ の位より後は、9の無窮の連續なり。又(2)に於て等號を採るべきは a が r_0、r_1、$r_2 \ldots\ldots r_k \ldots\ldots$ の最大なるとき即ち $r_k = r_{k+1} = r_{k+2} = \ldots\ldots$ 随て $c_{k+1} = 0, c_{k+2} = 0 \ldots\ldots$ 即ち a が $\frac{1}{t^k}$ の位に終れる有限小數に等しき場合に限れり。即ち a と $\bar{a}$ の相等しきときは、此兩數の展開は次の如くなるべきなり、

$$a = (m_0, c_1 c_2 \ldots\ldots c_k)$$

$$\bar{a} = (m_0, c_1 c_2 \ldots\ldots \bar{c}_k 999 \ldots\ldots) \qquad c_k = \bar{c}_k + 1$$

即ち第六章(九)の特異なる場合の外は相異なる無限小數は常に相異なる數を表はし、同一の數が二様の展開を與ふることなし。

（八）

有理數の加法は既に定まれる意義を有し、此意義はよく前章に擧げたる第二原則に適合せり。さて無理數の關係せる加法も亦然るを得べきか。

α、β を二つの無理數とし、α より大又小なる有理數を一般にそれぞれ a、a' にて表はし、又之を一括してそれぞれ A、A' と名づく、β につきては b、b'、B B' を同樣の意義に用ふ、卽ち例へば或る a と言ふは、A に屬する卽ち α より大なる或有理數といふに同じく、又或 $a+b$ とは「α より大なる或有理數と β より大なる或有理數との和」といふに同じ。

さて一般に $a<\alpha<a'$, $b<\beta<b'$ なるにより、第八章(一二)の第二原則四によりて $\alpha+\beta$ なる和は次の條件に適合せざるべからず。

$$a+b<\alpha+\beta<a'+b'$$

然るに、凡ての $a+b$ より小にして、同時に又凡ての $a'+b'$ より大なる數は唯一個に限り存在す。先づ $a+b$ に下限あり、之を γ と名づく、又 $a'+b'$ に

上限あり、之を r' と名づく。しかするときは r と r' とは相等し。げにも假に $r'>r$ なりとするに、r' より小にして、而も如何程にても之に近き或 $a+b$ あり、又 r より大にして、而も如何程にても之に近き或 $a+b$ あるが故に、$r'>r$ より或 $a+b$ が或 $a+b$ より大なりとの容すべからざる結論を得。故に r' は r より大なるを得ず。嚴密なる數學的「句調」を以て之を再言せば、先 $r'>r$ ならば、必ず $r'>r''>r$ なる如き數 r'' 存在す、さて r は $a+b$ の下限にして、r'' は r より大なるが故に、下限の定義によりて $r''>a+b>r$ なる如き a、b 存在せざるを得ず。又 r' は $a+b$ の上限にして r'' は r' より小なるが故に $r'>a'+b'>r''$ なる如き a' b' 存在せざるを得ず。是に於て $a+b>a'+b'$ なる容すべからざる結論を生ず。

次に又 $r'<r$ となさば $r'<r''<r'''<r$ なる如き二個の有理數 r'' r''' を採るに、$a+b<r''<r'''<a'+b'$ 随て $(a+b)-(a'+b')=(a-a')+(b-b')<r''-r'''$ なる不等式恒に成立すべし、是亦容すべからざる事なり。何とならば(四)に言へる如く

A、A'より其差如何程にても小なる一對の數 a、a'、又 B、B' より其差如何程にても小なる一對の數 b、b' を選み得べく、隨て $(a'-a)+(b'-b)$ をして $\gamma'-\gamma$ なる數よりも小ならしむべく、a、a'、b、b' を採り得べければなり。是故に γ、γ' は相等し。 さて凡ての $a+b$ より小なる數は γ より大なるを得ず、又凡ての $a'+b'$ より大なる數は γ' より小なるを得ざるが故に $a+b$ は此 $\gamma=\gamma'$ に等しからざるを得ず。

此論法は又 α、β の一方又は雙方が有理數なる場合にも適用せられ得べし。卽ち一般に α、β の和はそれぞれ α、β より大なる有理數 a、b の和の下限にして同時に又それぞれ α、β より小なる有理數 a' b' の和の上限なり。加法にして上述の第二原則に遵ふべき上は、α、β の和は上の如く定むるを必須とす。卽ち無理數の關係せる加法の意義は、第二原則の一部のみによりて一定の意義を得たり。 さて斯の如く既に定まれる加法が、尙よく、第二原則の各條に適合すべきや否や。是容易に解決せられ得べき、然れども又解決せられざ

る可からざる問題なり。

例へば交換の法則につきて言はんに、α、β が與へられたる二つの數にして其中少くとも一方が無理數なるときは $\alpha+\beta$、$\beta+\alpha$ はそれぞれ次の條件によりて定まるべき數なり

$$a+b>\alpha+\beta>a'+b', \qquad b+a>\beta+\alpha>b'+a'$$

さて有理數の加法は交換の法則に遵ふこと既に知られたるが故に、上の兩不等式より

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

を得。其他類推すべし。

α、β の差は、a、a'、b、b' を上述の意義に用ゐるとき

$$a-b'>\alpha-\beta>a'-b$$

によりて定まるべき唯一の數なり。

(九)

前節に說きたる如き、又は一般に無理數につきて上文用ゐ來れる論法は、往々、此種の抽象的の思索に慣れざる人の、理會に苦しむ所なり。而して困難は常に推理の進行の步々追跡し難きにあらずして、却て大體に於て斯の如き三段論法の連鎖の嚮ふ所の那邊に在るかの明ならざるに存せり。例へば始めて幾何學の教課を受くる兒童の如し、凡て直角の相等しきことは彼等の熟知する所なり。何故に故らに某公理、某定理を或順序に連結したる後始めて之を知り得たりと言ふか。疑問は立脚點の不明より起る。

凡て二つの數に一定の和あり、其和が前章(九)の諸原則に背馳せざること、吾輩のよく知る所なり。吾輩豈に明白斯の如き事實を疑はんや。吾輩は今斯の如く明白にして、斯の如く各人の其所觀を一にする事實の根據の何處にあるかを探らんと欲する者なり。

α、β なる二數が十進命數法にて表はされたりとし　$(r = 10)$

$$\alpha = (a_0\, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots)$$

と置き r_k、r_k' を先に屢言へる如き意義に用ゐるときは、一般に

$$r_k = (m_0, c_1c_2\ldots\ldots c_k) \qquad r_k' = r_k + \frac{1}{t^k}, \qquad r_k' > \alpha > r_k$$

又

$$\beta = (n_0, d_1d_2\ldots\ldots d_k\ldots\ldots)$$

につきて s_k、s_k' を同様の意義に用ゐて

$$s_k = (n_0, d_1d_2\ldots\ldots d_k), \qquad s_k' = s_k + \frac{1}{t^k}, \qquad s_k' > \beta > s_k$$

となす。一般に

$$r_k' + s_k' > \alpha + \beta > r_k + s_k$$

にして $r_k + s_k$ は $\alpha + \beta$ より小なる其近似値、$r_k' + s_k'$ は $\alpha + \beta$ より大なる其近似値なり、k を順次増大するときは、即ち α、β の展開の桁数を採ること愈々多ければ $r_k + s_k$ $r_k' + s_k'$ は愈々 $\alpha + \beta$ に近接し、k を増大して止まずば $r_k + s_k$ $r_k' + s_k'$ は上下より $\alpha + \beta$ に近迫して究まる所なし。二つの無限小数の和といふことを口にして人の少しも怪まざるは、如上の事實を確信すればなり。

然れども r_k+s_k の上限と $r'_k+s'_k$ の下限との果して一致するや否や、是證明を要せずして斷定せらるべき問題にあらず。而して此上限と下限との實際一致すべきことは、前節所說の中に含蓄せられたる所なり。r_k は是一の a なり、s_k は是一の b なり。r_k+s_k の上限は $\xi+\eta$ の上限 γ を超えず。さて α、β より小なる或有理數 a、b を考ふるに r_k、s_k の上限は卽ち α、β なるにより、a、b より大なる r_k、s_k は必ず存在す。詳しく言はば α、β の展開の桁數を充分永く採りて、a、b よりも一層 α、β に近接せる有限小數を得べし。是故に r_k+s_k の上限は決して $\xi+\eta$ の上限 γ を下らず。故に r_k+s_k の上限は γ に外ならざるを知る。$r'_k+s'_k$ の下限が $\xi+\eta$ の下限 γ' 卽ち γ と同一なること亦同樣にして證明せらるべし。

A、B に屬せる凡ての有理數の中より特に特殊の有限小數 r_k、s_k を採り、又 A'、B' より特に r'_k、s'_k を採る。是理論上其必要なくして、徒に問題の解釋を狹め、其美を殺ぐなり。前節に述べたる和の說明に於ては、數の觀念及加法の意義に直

接の關係なき、命數法なるものを度外に置きたるに過ぎず。

然れども無限小數は實用上の計算に使用せらるゝことなく、又使用せらるゝを得ず。實用上吾人の最多く遭遇するは、誤差の範圍を豫定して、算法の結果の近似値を算出すべき場合なり、數は凡て十進命數法に於て與へらる。斯の如き場合には吾人は無限小數の展開の若干項を採りて、其他を省略す。是故に實用上の計算は凡て有限小數の計算なり。

α、β の展開は前の如しとして、其 $\frac{1}{10^n}$ 位以下を「切り捨て」、和の近似値として

$$r_n + s_n = (m_0 c_1 c_2 \ldots\ldots c_n) + (n_0 d_1 d_2 \ldots\ldots d_n)$$

を得。此場合に於ては

$$r_n + \frac{1}{10^n} > \alpha > r_n \qquad s_n + \frac{1}{10^n} > \beta > s_n$$

なるが故に

$$(\alpha + \beta) - (r_n + s_n) < \frac{2}{10^n}$$

卽ち誤差は $\frac{2}{10^n}$ を超ゆることなし。こゝに注意すべきは誤差の範圍 $\frac{2}{10^n}$ より

小、卽ち $\frac{1}{t^{k-1}}$ より小なりと雖、$\xi_k+\eta_k$ は凡ての場合に於て、必ず $\xi+\eta$ の展開を $\frac{1}{t^{k-1}}$ の位まで正しく與ふるを保し難きこと是なり。次の一例は此間の消息を傳へて餘あり。

$$\alpha = 0{,}5452165 7\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta = 0{,}3273834 8\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha+\beta = 0{,}8726000(?)\ldots\ \ldots$$

に於て、若 α、β の展開を小數點以下第七位まで採りて之を加ふれば 0.8725999 を得、此數と $\alpha+\beta$ との差は $\frac{1}{10^6}$ より小なり。然れども其展開の係數の一致するは第三位に止まれり。

一般に α、β の近似値 a、b の與へられたるとき和の近似値 $a+b$ の誤差の範圍は、a、b の精確の程度によりて決定せらるべきものにして、此精確の程度につきて知られたる凡てを利用して、成るべく良好なる和の近似値を定むること、卽ち其誤差の範圍を成るべく正確に定むることは、個々の場合に於ける臨

機の工夫に待つ所多し、要するに斯の如き省略計算は次の事實を其根據とす。

$\alpha+\beta=\gamma$ に於て α、β の變動の區域を相當に制限して、以て γ の變動を、如何程にても小なる、但豫め定められたる範圍内に留まらしむるを得、といふこと是なり。此意義に於て加法を連續的の算法と稱す。

（十）

先に無理數觀念の萌芽をユークリッドの比例論の中に發見せるに因みて、此處に比例に關する二三の定理を證明し、一には以て數と量との關係を明にし、又一には乘法、除法の根據を此中に覓めんとす。

量の比の觀念は直ちに移して之を數に適用すべし。第八章（七）に説きたる比の定義の要點を拔摘して、此處に之を反復すること次の如し。

α、β なる二つの數與へられたるとき、一對の自然數 m、n を採りて $n\alpha$、$m\beta$ を作るに $n\alpha \gtreqless m\beta$ なる三つの場合を生ず、此等の場合に於て順次 $\alpha:\beta$ なる比を $m:n$ より大、$m:n$ に等し、$m:n$ より小なりといふ、卽ち

α、β、α'、β'なる二對の數與へられたるとき

$\frac{m}{n} \lesseqgtr \frac{m'}{n'}$　と同時に　$\alpha:\beta \lesseqgtr \frac{m}{n}$

$\alpha:\beta > r > \alpha':\beta'$

なる如き有理數r存在するときは　$\alpha:\beta$　は　$\alpha':\beta'$　より大なりとし、又若し斯の如き有理數r存在せざるときは　$\alpha:\beta$　と　$\alpha':\beta'$　とは相等しといふ。

比の相等大小を定むるに、有理數を用ゐたりと雖、こは只言語の簡約を期するの意に出でたるに過ぎずして、内容に於ては上の定義はユークリッドのそれと異なることなし。

$\alpha:\beta$が有理數に等しからざるときは、此比は有理數の範圍を兩斷す、此兩斷は或一個の無理數rによりて惹起さるゝ者にして、此場合には上述の比の相等の定義に從て　$\alpha:\beta$　と　$r:1$　と相等し、或は　$\alpha:\beta$　は無理數rに等し、(三)を看よ。然れども吾人は此處に姑らく　$\alpha:\beta$　をrに等しとなすてふ現代の思想を離れ、ユークリッドと同一の見地に立ち、專ら上述の定義に固着して次の諸

定理を證明せんとす。

一、$a' > a$ ならば $a' : b > a : b$

證。アルキメデスの法則によりて (1) $n(a'-a) > b$ なる如き自然數 n 必ず存在す。斯の如き自然數の一つを任意に採りたる上 (2) $mb > na$ なる如き最小の自然數 m を定む、即ち (3) $na + b \geqq mb$ なり。さて (1) によりて $na' > na + b$ よりて (3) を用ゐて $na' > mb$ 即ち

$$a' : b > \frac{m}{n}$$

然るに (2) によりて

$$a : b < \frac{m}{n}$$

なるが故に $a' : b > a : b$

二、$b' > b$ ならば $a : b' < a : b$

げにも一によりて $b' : a > b : a$ 即ち $b' : a > \frac{n}{m} > b : a$ なる如き有理數 $\frac{n}{m}$ は存在す。さて $b' : a > \frac{n}{m}$ より $mb' > na$ 即ち $a : b' < \frac{m}{n}$ を得、又同樣にして

$\alpha:\xi > \frac{m}{n}$ よりて定理は成立せり。

三、$\alpha:\beta = \gamma:\delta$ なるときは又 $\alpha:\gamma = \beta:\delta$ なり。

證、假に $\alpha:\gamma$ と $\beta:\delta$ と相等しからず、例へば前者は後者より大なりとなさば

$$\alpha:\gamma > r > \beta:\delta$$

なる如き有理數 r 存在せざるを得ず。随て

$$\alpha > r\gamma \qquad \beta < r\delta$$

故に一、二によりて $\alpha:\beta > r\gamma:\beta > r\gamma:r\delta$ 随て $\alpha:\beta > \gamma:\delta$ を得、前提に矛盾す。

四、比例式の定理。β、γ、δ なる三つの數與へられたる時は

$$\alpha:\beta = \gamma:\delta$$

なる如き數 α は必ず、而も唯一個に限り存在すべし。

此定理は連續の法則を根據とす。先づ $\xi:\beta > \gamma:\delta$ なる如き數 ξ は凡て之を O に編し、又 $\eta:\beta < \gamma:\delta$ なる如き數 η を一括して之を U と名づく。ξ は凡て η

より大なるべきこと定理一によりて明白なり。さて**O**に最小の數あることなし。げにも $\xi:\beta>\gamma:\delta$ なる數 ξ の一つを任意に採りて考ふるに $\xi:\beta>\frac{m}{n}>\gamma:\delta$ なる如き有理數 $\frac{m}{n}$ は必ず存在す。$n\xi>m\beta$ さて $n\xi-m\beta$ なる數と自然數 n とに對して $n\xi-m\beta>n\varepsilon$ なる如き數 ε も亦必ず有りて ε は ξ より小なり。さて $n(\xi-\varepsilon)>m\beta$ 即ち $\xi-\varepsilon:\beta>\frac{m}{n}$ 随て $\xi-\varepsilon$ は**O**に屬し、而も ξ より小なり。是**O**に最小なきなり。同樣にして又**U**に最大の數なきを確むべし。是故に連續の法則によりて**O**、**U**は未だ凡ての數を盡さゞるを知る。**O**にも又**U**にも屬せざる數卽ち $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ なる如き數 α は必ず存在す。α が唯一個に限り存在し得べきことは定理一によりて明白なり。

定理三を用ゐて四を擴張し次の結果を得。

α、β、γ、δ の中三つを與へて $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ なる如き他の一つを必ず而も唯一樣に定むることを得。

ユークリッドの比の定義を基礎として比例に關する諸定理を證明するには凡

て上の例に倣ふべし。

比例式の定理によりて數の乘法及除法を定むることを得。α、β なる二つの數の與へられたる時、α、β の積 γ は

$$\gamma : \alpha = \beta : 1$$

なる比例式に適合すべき數なり。乘法の轉倒は γ 及 α、β の中の一つを與へて他の一つを求めんとするものにして、こは畢竟比例式の未知項の所在を移せるに過ぎず。

此定義に從ふときは乘法の交換の法則は定理三の直接の結果なり、然れども一般に乘法の諸性質を直接に上の定義より得來らんと欲せば稍、複雜なる徑行を要すべし。

(十一)

乘法の諸性質を證明せんが爲に、先づ前節に擧げたる其定義を便利なる形に改めんとす。

α、β の積 γ は

$$\gamma : \alpha = \beta : 1$$

なる條件によりて定めらるべき數なり。是故に今 b を以て β より小なる有理數となすときは $\beta:1>b$ 隨て $\gamma:\alpha>b$ 即ち $\gamma>b\alpha$ 又 b' を β より大なる有理數となすときは $\gamma<b'\alpha$ 即ち

$$b'>\beta>b, \qquad b'\alpha>\gamma>b\alpha.$$

是故に $b\alpha$ の上限は γ を超えず又 $b'\alpha$ の下限は γ を下らず、b、b' を相當に選みて其差をば如何程にても小ならしむることを得べきが故に、此上限と下限とは實は同一の數にして共に γ に等し。即ち α に β を乘せる積 γ は、$b\alpha$ の上限、又は $b'\alpha$ の下限なりといふことを得。

α、β なる兩因子に對等の位置を與へんと欲せば、α より小又大なる有理數を一般に a、a' と名づけ、之を一括して A、A' とす。β につきても亦同樣の名稱を適用するに、

$$a'b' > r > ab$$

ab に上限あり、之を r_1 と名づく、$a'b'$ に下限あり、之を r_2 と名づく。しかするときは

$$r_2 \geqq r \geqq r_1$$

さて $r_2 > r_1$ なることを得ず。假に $r_2 > r_1$ なりとせば $r_2 > c_2 > c_1 > r_1$ なる如き有理数 c_1、c_2 の存在を認めざるを得ず、是故に $r_2 > r_1$ なりといふは a、b、a'、b' を如何やうに選むとも常に $a'b' - ab$ が一定の數 $(c_2 - c_1)$ より大なりと主張するに異ならず。斯の如き主張は次の如くにして之を轉覆すべし。先づ α よりも又 β よりも大なる一個の自然數 g を任意に定め、又別に ε なる數を與ふるに

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{2g}, \qquad b' - b < \frac{\varepsilon}{2g}$$

なる如く、同時に又 $a > \alpha$、$b > \beta$ なる如く、a、a'、b、b' を採ることを得べし、さて

$$a'b' - ab = a'b' - a'b + a'b - ab$$
$$= a'(b' - b) + b(a' - a) < \varepsilon$$

即ち如何なる数 ε を與ふるとも、$a'b' - ab < \varepsilon$ なる如き a、a'、b、b' は必ず存在せり。是によりて α、β の積 γ は ab の上限にして、同時に又 $a'b'$ の下限なりといふことを得。

或は又 α、β が十進命数法にて與へられたりとし、其小数第 k 位までを採り、其他を省略して作りたる有限小数を a_k、b_k と名づくるとき、a_k、b_k はそれぞれ前の A、B に屬せる有理数にして $\gamma > a_k b_k$ 而も $a_k b_k$ は k と共に増大し γ を其上限となす。是既に屢用ゐたる論法によりて容易に證明せられ得べき所にして、實際に於ける無理数乗法の計算は此事實を根據とす。

α、β の積 $\alpha\beta$ は ab の上限にして又 $\beta\alpha$ は ab の上限なるが故に $\alpha\beta = \beta\alpha$

又 α、β の外 γ を採り γ より小又大なる有理数を一般に c、c' と名づくれば $(\alpha\beta)\gamma$ は $(ab)c$ の上限にして $\alpha(\beta\gamma)$ は $a(bc)$ の上限なり。さて $(ab)c = a(bc)$ な

るが故に又 $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ 同樣にして又 $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ を得。

α を β にて除して得べき商は $\alpha:\beta$ なる比の値卽ち $\alpha:\beta=\gamma:1$ に適合すべき數 γ なり。此と除法とを同一の記法にて表はせるは實は此事實を豫期せるに由る。

a、a'、b、b' を例の如き意義に用ゐるときは

$$\frac{a'}{b}<\gamma<\frac{a}{b'}$$

にして且 $\frac{a}{b'}$ の上限及 $\frac{a'}{b}$ の下限は共に γ に等し、其證明は讀者の類を以て推すに任して可なるべし。

若し α、β が十進命數法に於て與へられたりとし、r_k、s_k を例の如き意義に用ゐて $\frac{r_k}{s_k}$ を作るときは、k を限なく增大して、如何程にても $\frac{\alpha}{\beta}$ に近迫することを得べし。然れども此場合に於ては $\frac{r_k}{s_k}$ は k と共に增大又は減小する者にあらず、隨て $\frac{\alpha}{\beta}$ は $\frac{r_k}{s_k}$ の上限又は下限にあらず。若し r_k'、s_k' を(七)に於けるる如き意義に用ゐるときは、卽ち r_k'、s_k' を以て r_k、s_k の末位の係數に 1 を加へ

て得たる有限小數となすときは $\frac{r_k'}{s_k}$ は即ち一個の $\frac{a'}{b}$ 又 $\frac{r_k}{s_k'}$ は一個の $\frac{a}{b'}$ にして、$\frac{r_k}{s_k}$ は常に兩者の中間にあり。

$$\frac{r_k'}{s_k} > \frac{a}{b} > \frac{r_k}{s_k'} \qquad \frac{r_k'}{s_k} > \frac{r_k}{s_k} > \frac{r_k}{s_k'}$$

要するに無理數の關係せる乘法、除法の意義は斯の如くにして確定し、又其性質は有理數の乘法除法と異なる所なきなり。

（十二）

前諸節に論ぜる所謂數は即ち正數なり。是即ち大小の關係及加合の結果を保持して、個々の量に配合せらるべきものにして、凡ての量の數値を供給するに於て、復た間然する所なし。然れども、數の觀念の起源に固着して、數をば單に量の數値を與ふるものと認め、隨て正數のみを以て考究の範圍となすことの、極めて不便なるは、既に有理數の場合に於て說きたる所にして、又量の數値としては意義なき「零」なる者を數の範圍内に攝取することの殆ど絕對的必須なること、前章に於ける經驗新なり。

加法の轉倒を凡ての場合に可能ならしめんが爲には、負數を作らざるべからず。而して其定義及四則算法の意義は有理數の場合に於けると全く同趣なり。此處に其概要を記せば則ち次の如し。

各の正數 a に對して一個の負數を作り、之を $-a$ と名づく。a を此負數の絶對値となす。

凡て正數は負數より大にして、二つの負數の大小は其絶對値の大小に反す。

負數の關係せる加法の意義を定むること次の如し。α、β の中一は正にして一は負なるときは、α、β の和の絶對値は α 及 β の絶對値の差に等しく、又其符號は絶對値大なる者の符號に同じ。α、β の絶對値等しくして、符號相反せるときは、α、β の和は 0 に等し。α、β 共に負數なるときは、α、β の和は亦負數にして其絶對値は α 及 β の絶對値の和に等し。

負數の關係せる加法の意義を斯の如く定むるときは、其よく交換の法則及組み合はせの法則に遵ふこと容易に驗證せらるべき所なり。

又一般に $a>b$ に伴ひて必ず $a+c>b+c$ 加法の轉倒は常に可能にして其結果唯一なり。

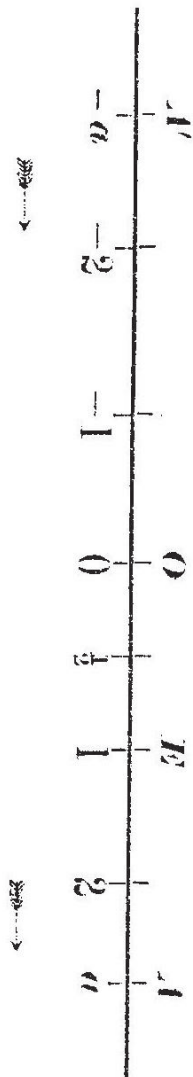
負數の關係せる乘法及除法は所謂符號の法則によりて定まる、次の諸式は此法則を說明す。

$$(-a)b=-(ab),\qquad -a:b=-(a:b),$$
$$a(-b)=-(ab),\qquad a:(-b)=-(a:b),$$
$$(-a)(-b)=ab,\qquad (-a):(-b)=a:b.$$

乘法が交換、組み合はせ、及加法に對する分配の法則に遵ふことの驗證をこゝに縷說するの必要あらざるべし。

之を要するに正數負數の全範圍內に於て前章の結末に揭げたる、數の諸原則盡く成立するのみならず加法の轉倒は凡ての場合に可能なり。連續の法則は唯數の大小のみを根據として少しも加法に關係なきことに注意すべし。有理無理のあらゆる數を總括して之を實數といふ。實數は其全體に於て、定に完全

なる一系統を成し、其全範圍は統一的の原則によりて支配せられたり。

凡ての正數及負數の大小の關係を具體的に表顯せんと欲せば、之を無限に延長せる一直線上の凡ての點に對照すべし。此直線上に於て任意に一點 O を採りて之に 0 なる數を配し、次に O と異なる一點 E を採り之に 1 を配す。一般に A なる點には、$OA:OE$ なる比の値 a を絶對値とし、A が O に對して E と同じ側にあると否らざるとに隨て正又は負なる數 a 又は $-a$ を配す。斯の如くにして此直線上の個々の點と、個々の實數とを相對照することを得。此對照の狀況は次の圖によりて説明せらるべし、箭は小なる數より大なる數に向ふ。

第十章　極限及連續的算法

集積點、極限、其定義及例○集積點に關する基本の定理○無限列數、極限存在の條件○極限と四則、無理數及其算法の第二の定義○連續的算法の定義、連續的算法の擴張○單調の變動、單調なる算法の轉倒

（一）

一直線上の個々の點に個々の數を對照して、其大小の關係を具體的に表顯すべきことは既に說きたり。凡て抽象的に數を考ふるに當り、斯の如き幾何學上の形象を連想して大に理解の圓滑を扶くべき場合甚だ多く、此の如き場合に於ては、寧ろ直に幾何學上の思想に因める言語を用ゐるを便利なりとす。但こは主として言語の簡約を目的とするに過ぎず、隨て思想の內容に於て、數に關せる考察と幾何學的の直覺との混同せられざるべきこと、最注意を要す。

先づ此種の用語例二三を說明せん、a より大にして b より小なる數を總括して、之を a より b に至る間隙又は $a \cdots b$ なる間隙にある數と云ふ。μ なる數

$a<x<b$ なる間隙に位すとは、x は a より大にして b より小なりといふに同じ。a、b は此間隙の兩端にして、場合によりて、兩端の一方又は雙方を間隙の中に收め、或はしかせず。$b-a$ を此間隙の幅といふ。又「a の邊り」「近く」とは a を含める間隙といふに同じく、通常其間隙の兩端は不定なり。これら象形的の語句枚擧に遑あらず、又其意義は説明を須ひずして明なるべし。

前章に於て無理數四則算法の結果をば無限に多くの有理數の上限又は下限として定めたり。今更に此思想を擴張せんとするに當り先づ集積點なる語を説明せざるべからず。

無限に多くの定まりたる數の一系統 S が g を上限とせるとき、g 若し S の最大の數にあらざるときは、S の諸數は限りなく g の附近に集積す。詳しく言はば ε を如何程小なる數なりとするも $g-\varepsilon \cdots\cdots g$ なる間隙の中には S に屬せる數限りなく多く含まれたり。例へば

$$0.9,\quad 0.99,\quad 0.999,\quad \cdots\cdots\quad \cdots\cdots\quad \cdots\cdots \qquad (1)$$

の如く9を若干個并べ書きて表はされたる凡ての有限小數を一括して之をsとなすときは1はsの上限にして而も其最大にあらず。さて如何程小にてもよし、εなる數を與ふるに(1)の諸數の中$1-\varepsilon$より大なる者限りなく存在すべし。

一般に限りなく多くの定まれる數の一系統sの諸數が或定まれる數λの附近に限りなく集積するときは、λをsの**集積點**といふ。卽ちλの如何程近くにも、尙詳しく言はゞ、其幅如何程小くともよし、凡そλを含めるあらゆる間隙の中に、sの諸數が限りなく多く含まるゝなり。但λなる數自らがsに屬すると然らざるとは問ふ所にあらず。

例へば$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$等、一般に、$\frac{1}{m}$、$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$の如き分數を總括して之をsと名づく。sを組成せる數は凡ての幹分數及び二つの相異なる幹分數の和なり。さて$\frac{1}{2}$はsの集積點なり、げにも$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$、……$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$、……はsに屬せるが故に、$\frac{1}{2}$の如何程近くにもsの數限りなく存在

す。$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$……一般に $\frac{1}{m}$ も亦 s の集積點なり。然れども $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ は s の集積點にあらず、s の諸數の中此數に最近きは $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ にして、兩者の中間には s の諸數一も存在せず。$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ は s の最大の數なり。又 0 は s の集積點なり。0 は s の下限にして、これ即ち下限が集積點なる例なり。

α、β を二つの無理數とし、其展開の係數を t^{-n} の項まで採りて作りたる有限小數をそれぞれ r_n s_n と名づく。今順次 n を 1、2、3……となして作り得べき凡ての有理數 $\frac{r_n}{s_n}$ を總括して之を s と名づくるに、$\frac{r_n}{s_n}$ は n の愈、增大するに隨ひて、愈、$\frac{\alpha}{\beta}$ に近迫して究まる所なしと雖、$\frac{\alpha}{\beta}$ は s の上限又は下限にあらず。(第九章(十一)を看よ)$\frac{\alpha}{\beta}$ は s の集積點なり。げにも

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{r_n}{s_n}=\frac{\alpha s_n-\beta r_n}{\beta s_n}$$

今 α、β のいづれよりも(絶對値に於て)大なる數の一つを任意に採りて之を c と名づくるに、

$$\alpha s_n-\beta r_n=\alpha\beta-\beta r_n-(\alpha\beta-\alpha s_n)$$

$$= \beta(\alpha - r_n) + r_n(\beta - s_n)$$

にして $\alpha - r_n$ $\beta - s_n$ は共に $\frac{1}{t^n}$ を超えず、随て $\alpha\beta - r_n s_n$ は其絶對値に於て $\frac{c}{t^n}$ より小なり。又絶對値に於て s_1、s_2……のいづれよりも小なる正數を任意にとりて之を h と名づくれば βs_n は h^2 より大なり、是故に

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{r_n}{s_n}$$

は絶對値に於て $\frac{c}{h^2}\cdot\frac{1}{t^n}$ よりも小なり。こゝに c、h 随て $\frac{c}{h^2}$ は n には關係なき定まれる數なるに注意すべし。是故に n を増大して已まずば上の差は絶對値に於て漸次減小して究極する所なきを知るべし。即ち如何に小なる數 ε を與ふるとも、

$$\frac{c}{h^2}\cdot\frac{1}{t^n} < \varepsilon \quad 即ち \quad t^n > \frac{c}{h^2\varepsilon}$$

より n を定むるとき、(t を10となさば $\frac{c}{h^2\varepsilon}$ の整數部分の桁數を n_0 となすときは n を n_0 以上の自然數となして、此條件常に充實せらるべし) $\frac{r_n}{s_n}$ は盡く

$$\frac{\alpha}{\beta}-\varepsilon \cdots\cdots \frac{\alpha}{\beta}+\varepsilon$$

なる間隙に歸入す。$\frac{\alpha}{\beta}$ は $\frac{r_0}{s_0}$、$\frac{r_1}{s_1}$ ……の集積點なり。β が $(0.00\cdots\cdots0\beta'\beta''\beta'''\cdots\cdots)$ の如き數にして s_0、s_1、s_2 ……等が 0 なる場合に施すべき些少の更正は特に辨明するの價なかるべし。

此例に於ては s の諸數に n なる自然數の附標によりて與へらるゝ一定の順序ありて、n の順次增大するに隨ひ、s の數は其唯一の集積點に近迫せり。一般に。

$$(ヌ)\qquad a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$$

の如き列數の諸項 a_n が n の增大すると共に、s の唯一の集積點 λ に近迫して究まる所なきときは、斯の如き狀態を簡短に書き表はさんが爲に

$$\operatorname{Lim.}_{n=\infty} a_n = \lambda$$

なる記法を用ゐる Lim. は羅甸語 Limes の略語にして、極限の義なり。$n=\infty$ とは n の漸次增大して究まる所なかるべきを示せる符牒なり。此式は例へば

次の如く訓むべし。曰く、「n 無限に增大するとき a_n の極限は λ なり」又は「n の無限に增大するとき a_n は λ なる極限に近迫す。」斯の如き用語は、複雜なる事實を簡潔に指示せん爲に用ゐる暗號に過ぎざるを看取すべし。n を如何なる自然數となすとも a_n は決して λ に等しからず。例へば s は

$$0.9,\quad 0.99,\quad 0.999,\ \ldots\ldots$$

等の數より成れりとするとき、極限は卽ち 1 なり。然れども桁數を如何に多くとるとも斯の如き有限小數の決して 1 に等しきことなし。$0.9 = 0.999\ldots\ldots$ なる無限小數は 1 に等しといふは實は s の極限 1 なりといふに異ならず。

然れども例へば $\alpha = 1.25$ $\beta = 3.748$ の如き有限小數につきて前の如く $r_n : s_n$ を作るときは n が 3 以上となるとき $\frac{r_n}{s_n}$ は常に $\frac{1250}{3748}$ に等しき如き特別の場合あり。此場合に於ては $\frac{\alpha}{\beta}$ は本來の意義に於ての $\frac{r_n}{s_n}$ の極限に非ず。之をしも極限の中に算するは、强て極限の意義を擴張して以て或場合に於ける用語の上の便利を享けんとするなり。

集積點の觀念は既に明なりとして、こゝに一の重要なる定理を證明せんとす。

(二)

無限に多くの數より成れる s なる一系統が $a \dots\dots b$ なる間隙に收められたるときは、s は少くとも一個の集積點を有す。

a、b なる二個の定まりたる數の中間に限りなく多くの數を容れんと欲するときは、此等の諸數の少くとも或一個所に集積すること已むを得ざる所なりといふに過ぎず。是極めて明瞭なる事實ならずや。嚴密に此定理を證明せんと欲せば次の如くにして可なり。

s の諸數は盡く $a \dots\dots b$ なる間隙に含まれたりといふが故に、a、b 若し自然數ならずば之に代ふるに直ちに a より小なる又は直ちに b より大なる自然數を以てし、s の諸數をば盡く p、q なる二個の自然數によりて限られたる間隙に收むることを得。さて $p \dots\dots q$ なる間隙を分ちて

$$p \dots p+1,\quad p+1 \dots p+2,\quad p+2 \dots p+3,\ \dots\dots\dots\ q-1 \dots q$$

なる $\varepsilon'-\varepsilon$ 個の關隙となすに、s は、盡く此等の諸間隙中に收められ、而も s は無限に多くの數より成れるが故に、此等の間隙の中少くとも一つは、s の數限りなく多くを包含せざるを得ず。例へば $m_0 \ldots\ldots m_0+1$ なる間隙を其一となし、さて此間隙を分ちて

$$m_0 \ldots\ldots m_0+\frac{1}{10},\quad m_0+\frac{1}{10}\ldots\ldots m_0+\frac{2}{10},\ \ldots\ldots\ldots\quad m_0+\frac{9}{10}\ldots\ldots m_0+1$$

なる十個の間隙となすに、前と同樣にして、此等の間隙の中少くとも一つは、s の數を無限に包有せざるを得ず。今 $m_0+\frac{c_1}{10}\ldots\ldots m_0+\frac{c_1+1}{10}$ $(c_1 < 10)$ を以て其一とし、此間隙を分ちて

$$m_0+\frac{c_1}{10}\ldots m_0+\frac{c_1}{10}+\frac{1}{100},\ \ldots\ldots\quad m_0+\frac{c_1}{10}+\frac{9}{100}\ldots m_0+\frac{c_1+1}{10}$$

なる十個の間隙となし、前と同樣の論法を適用す。次第に斯の如くにして

$$m_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m_0+1$$

$$m_0+\frac{c_1}{10}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m_0+\frac{c_1+1}{10}$$

$$m_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{100}\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots m_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2+1}{100}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_0+\frac{c_1}{10}+\cdots\cdots+\frac{c_k}{10^k}\cdots\cdots\cdots\cdots m_0+\frac{c_1}{10}+\cdots\cdots+\frac{c_k+1}{10^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

或は略して一般に $r_k\cdots\cdots r_k'$ なる間隙を作るに、$r_k\cdots\cdots r_k'$ なる間隙は漸次狹小となりて究まる所なし而も此等の間隙の S の諸數を無限に多く包有するを必すべし。

さて斯の如くにして定め得たる、r_0、r_1、$r_2\cdots\cdots\cdots r_k\cdots\cdots\cdots$ はある定まりたる數の展開を與ふ。此定まりたる數を r と名づくるに、r は S の集積點ならざるを得ず。

げにも ε を如何程小なる數とするも r と $r+\varepsilon$ との中間には S に屬せる數必ず存在すべきなり。何とならば與へられたる數 ε より $\varepsilon>\frac{1}{10^n}$ なる如き指數 n を定むるに $r-r_n<\frac{1}{10^n}$ 　$r_n'-r<\frac{1}{10^n}$ 隨て

$$r-\varepsilon < r_n < r < r_n' < r+\varepsilon$$

なるにより $r-\varepsilon\cdots\cdots r+\varepsilon$ なる間隙は、全く $r_n\cdots\cdots r_n'$ なる間隙を包含せり。さて $r_n\cdots\cdots r_n'$ なる間隙既に S の諸數を含むが故に $r-\varepsilon\cdots\cdots r+\varepsilon$ なる間隙も亦勿論然らざるを得ず。

是によりて S の集積點の存在を證明すると同時に、實際集積點に到達すべき方法を知得せり。

（三）

集積點に關して前節に證明せる基本定理を應用して無限列數に極限の存在すべき條件を定むることを得。

(S) $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$

なる列數の諸項が附數 n と共に限りなく增大する場合は姑らく措きて、S の諸項が盡く或一定の間隙 $i\cdots\cdots g$ の中に位する場合のみを考へんに、先づ或一定の順位以上にある諸項例へば $a_m, a_{m+n}\cdots\cdots$ 等の中二つづゝの差（絕對值）は

勿論 $a-a'$ を超えず、随て此等の差に一定の上限あり、之を s の n 位以上の振幅と名づけ δ_n を以て之を表はす。即ち a_n, a_{n+1} ...... 等の諸数は盡く $(a_n-\delta_n$ ......$a_n+\delta_n)$ なる間隙の中に位す。

$$a_n-\delta_n < a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots < a_n+\delta_n$$

δ_n は n と共に變動す、然れども δ_n は n の増大すると共に、決して増大することなし、即ち

$$\delta_n \geqq \delta_{n+1} \geqq \delta_{n+2} \geqq \ldots\ldots$$

これ δ_n, δ_{n+1} .... 等の意義より直ちに論結せらるべき所なり。

是故に δ_n, δ_{n+1} .... に下限あり。之を δ と名づく。附數 n を適當に（大きく）選みて以て n 位以上の諸項の振幅を如何程にても δ に近迫せしむることを得るなり。特に、δ が 0 に等しき場合に於ては、附數 n を適當に選みて s の第 n 位以上の諸項の差を如何程にても小なる豫め定められたる限界内に止まらしむることを得べきなり。例へば

なるときは

$$(S)\qquad 0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \cdots\cdots\cdots\ \left(a_n = 1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

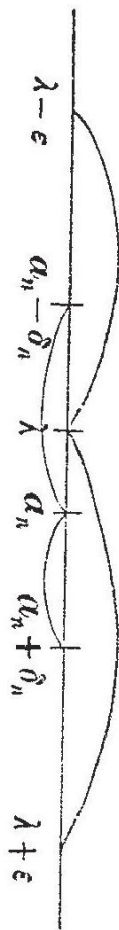
$\delta_n = \frac{1}{10^n}$ にして、δ は卽ち0なり。

一般に S の列數が一定の極限 λ を有するときは、δ は0に等し。げにも此場合に於ては n の限りなく增大するとき、a_n は限りなく λ に近迫す、卽ち ε なる正數を任意に豫定するとき、之に應じて n を相當に定めて以て $|\lambda - a_n|$, $|\lambda - a_{n+1}|$, $|\lambda - a_{n+2}|$ ……………をして盡く ε より小ならしむることを得、卽ち $a_n\ a_{n+1}\ a_{n+2}$ ………をして盡く $(\lambda-\varepsilon)$……$(\lambda+\varepsilon)$ なる間隙の中に歸入せしむることを得。隨て δ_n は 2ε より小なり。ε を如何に小なる數となすとも、之に應じて n を相當に定めて以て $\delta_n < 2\varepsilon$ ならしむることを得るは、卽ち $\delta_n\ \delta_{n+1}$ ………の下限 δ が0なるを示すにあらずして何ぞや。

S に一定の極限あるとき δ は0なりといふ事實は之を轉倒することを得。卽ち δ にして0ならば、S に一定の極限なかるべからず。隨て S が一定の極限を有する爲に必要にして且充分なる條件は δ の0なることにあり。是吾輩の

證明せんと欲する定理なり。

s の諸數は盡く $l \cdots\cdots g$ なる間隙の中に存せるが故に、s に集積點あり。若し s に一個より多くの集積點あらば、其二つを λ、λ' と名づくるに λ、λ' の如何程の近くにも s の諸數限りなく存在すべきが故に、附數 n を如何に大となすとも a_n a_{n+1} ……… 等の中 λ、λ' に如何程にても近き數あり。即ち δ_n 隨て δ も亦決して λ、λ' の差より小なることを得ず。是故に δ が 0 なる場合に於ては s は唯一個の集積點を有す、之を λ と名づくるに、λ は即ち s の極限なり。げにも先づ如何程小なる正數にてもよし、豫め任意に ε を與ふべし。δ は 0 なるが故に、n を相當に選みて $\delta_n < \frac{\varepsilon}{2}$ ならしむることを得、隨て a_n a_{n+1} a_{n+2} ……… は盡く $(a_n - \delta_n) \cdots\cdots (a_n + \delta_n)$ なる間隙に入る。s の集積點 λ は此間隙の中に位せざるを得ざるが故に $(\lambda - 2\delta_n) \cdots (\lambda + 2\delta_n)$ なる間隙、況んや $(\lambda - \varepsilon) \cdots\cdots (\lambda + \varepsilon)$ なる間隙は全く $(a_n - \delta_n) \cdots\cdots (a_n + \delta_n)$ なる間隙を包括す、是即ち $\lambda - a_n$, $\lambda - a_{n+1}$, $\lambda - a_{n+2}$ ……… が盡く絕對値に於て ε を超えざるを示せり。λ は

實に s の極限なり。

δ の 0 に等しといふ事實を言ひ更へて次の定理に到達す。

$$(S) \quad a_1 \; a_2 \; a_3 \; \cdots\cdots\cdots \; a_n \; \cdots\cdots\cdots$$

が一定の極限を有する爲に必要にして且充分なる條件は、豫め如何なる（如何程小にてもよし）正數 ε を與ふるとも、之に應じて適當に n を定め、以て s の n 位以上の二項 a_{n+h} a_{n+k} の差をして恆に（即ち自然數 h、k の選擇に關係なく）ε よりも小ならしむることを得ることにあり。s の極限は此場合に於て唯一個に限り存在し得べき s の集積點に外ならず。

（四）

無限列數の極限に關する次の諸定理は簡單と重要とを兼ねたり。

$$(A) \quad a_1, \; a_2, \; \cdots\cdots\cdots \; a_n, \; \cdots\cdots\cdots$$

なる二つの列數の極限をそれぞれ α、β となすときは

$$(B)\quad b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots\ b_n,\ \cdots\cdots$$

$$a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ \cdots\cdots\ a_n \pm b_n,\ \cdots\cdots$$

$$a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ \cdots\cdots\ a_n b_n,\ \cdots\cdots$$

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots\cdots\ \frac{a_n}{b_n},\ \cdots\cdots$$

等の無限列數の極限はそれぞれ $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ なり。唯其最後の場合に於ては β が0ならざるを必要とし、又 $\frac{a_n}{b_n}$ 等の諸項中より b_n の0に等しきものを撤去せざるべからず。

先づ和の場合より始め、豫め ε を與ふるとき、n を適當に選みて自然數 p に關係なく

$$\alpha + \beta - (a_{n+p} + b_{n+p})$$

の絶對値をして ε よりも小ならしむることを得べきを驗證せんとす。事最簡易なり。ε は與へられたり、$\frac{\varepsilon}{2}$ を作る。A の極限は α なり。$\frac{\varepsilon}{2}$ に應じて相當

にmを定め、以て

$$|\alpha - a_{m+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ならしむ。又Bの極限はβなり、$\varepsilon/2$に應じて相當にm'を定め以て

$$|\beta - b_{m'+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ならしむ。m'、mの中大なる方をnと名づけて

$$\alpha + \beta - (a_{n+p} + b_{n+p})$$

を作るに此差はεより小なり。卽ち

$$a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots\ldots\ a_n + b_n,\ \ldots\ldots$$

の極限は$\alpha + \beta$なるを確め得たり。減法の場合亦類推すべし。

さて$a_n b_n$の極限は如何。

$$\alpha\beta - a_n b_n = \alpha\beta - \beta a_n + \beta a_n - a_n b_n$$

$$= \beta(\alpha - a_n) + a_n(\beta - b_n)$$

Aの諸數に一定の上限あり、此上限とβとのいづれよりも小ならざる數の一

つを任意に採りて之を μ と名づく。今 ε を隨意に與へ、さて $\frac{\varepsilon}{\mu}$ を作り $\alpha-a_n$、$\beta-b_n$ 共に絶對的に $\frac{\varepsilon}{\mu}$ を超えざるが如き附數の限界を定むるに、此限界以上の n につきては

$$\alpha\beta-a_nb_n$$

は絶對値に於て ε を超えず。積の場合完了す。

商の場合に於て計算節儉の爲、先づ β の 0 ならざるとき、b_n の中 0 なるものなしと定めて

$$\frac{1}{b_1},\ \frac{1}{b_2},\ \cdots\cdots\ \frac{1}{b_n}\ \cdots\cdots$$

の極限 $\frac{1}{\beta}$ なるべきを辯ぜん。先づ

$$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{b_n}=\frac{b_n-\beta}{\beta b_n}$$

b_n は決して 0 に等しからず、又 β は 0 にあらず、故に絶對値に於て b_n の下限は 0 にあらざる或正數 γ にして β も亦絶對値に於て γ を下らず。故に βb_n の絶對値は γ^2 より小ならず。さて ε の與へられたるとき附數 n の限界を適當

に定めて $b_n - \beta$ なる差の絶對値をして恆に ϵ よりも小ならしむることを得。しかするときは

$$\left|\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b_n}\right| < \epsilon$$

$\frac{1}{b_n}$ の極限にして既に $\frac{1}{\beta}$ なる上は、$\frac{a_n}{b_n}$ の極限の $\frac{\alpha}{\beta}$ なるべきこと既に證明せられたりと謂ふべし。

一般に a_n、b_n……の極限は α、β……なるとき、F を以て α、β……等の數の間に引續き四則算法を或定まれる順序に施すべきことを示し $F(\alpha, \beta, \ldots\ldots)$ を以て此算法の總結果となすときは

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} F(a_n, b_n, \ldots\ldots) = F(\alpha, \beta, \ldots\ldots)$$

なり。例へば $a_n^2 + b_n^2$ の極限は $\operatorname{Lim}(a_n^2) + \operatorname{Lim}(b_n^2)$ に等しく、而して $\operatorname{Lim}(a_n^2)$ は α^2 に又 $\operatorname{Lim}(b_n^2)$ は β^2 に等しきが故に $a_n^2 + b_n^2$ の極限は $\alpha^2 + \beta^2$ なり。最一般なる場合に上の定理を證明せんと欲せば、數學的歸納法を用ゐて關係せる數 α、β……が N 個なる場合を、N 個より少數の數の關係せる場合に歸着せしむ

べきなり。但上述の定理に於て法が0なる除法の排斥すべきこと論を俟たず。」

最後に尙注意すべき一條あり。(A)の極限 α なるとき、(A)の諸項の一部分を除き去るとき、若し尙限りなく多くの項殘留する場合に於ては、此等を(A')と名づくるに A' の極限も亦 α なり。今

(A) $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots\ldots\ldots \quad a_n \ldots\ldots\ldots$

(A') $a'_1 \quad a'_2 \quad a'_3 \ldots\ldots\ldots \quad a'_n \ldots\ldots\ldots$

と置けば $a'_n = a_{n+r}$ にして $a'_n - a_n = a_{n+r} - a_n$ なるが故に $a'_n - a_n$ の極限は0隨て $a'_n = a_n + (a'_n - a_n)$ の極限は $\alpha + 0 = \alpha$ なり。又 A の諸項に若干の(限りある)項數を添加するとき、其極限は依然として變ずることなし。

ワイヤストラス及びカントル、メレーは有理數を項とせる列數の極限として無理數を定めたり。カントルは δ が0なる有理列數を基本列數と名づく。此見地を立脚點となすときは基本列數の極限が有理數ならざるときは、此列數は(其極限として)一の無理數を定むるものにして、此一節に於て證明せる諸定理

は卽ち無理數の關係せる四則の定義に外ならず。是れ畢竟無限小數を以て數を表はすの思想を擴張せる者にして、思巧の跡最明透なり。唯同一の數を定むべき基本列數が限りなく多くの異なる形式を有し得べきの一點最も憾むべしとなす。

(五)

有理數の四則算法を既定とし、之より極限の觀念によりて無理數の關係せる四則の意義を定め、竟に四則算法は、關係せる數の有理無理たるを問はず、凡ての場合に汎通せる法則に遵ふを確め得たり。今更に統一的の見地より此結果を觀察せんとす。

四則は連續的算法なり。ξ、ηなる二數に或る算法を施すとき此算法をfと名づけ、ξ、ηにfなる算法を施せる結果を書き表はすに$f(\xi,\eta)$なる記號を以てす。今ξ、ηに充分接近せる近似値x、yを採りて之に同一の算法を施し、以て$f(x,y)$をして豫め隨意に定められたる程度まで$f(\xi,\eta)$に接近せしむることを

得るときは、fを連續的の算法と云ふ。詳しく言はゞ ξ、η が與へられ、隨て$f(\xi,\eta)$ が定まれる數なるとき、豫め隨意に $\zeta_0<f(\xi,\eta)<\zeta_0'$ なる限界 ζ_0、ζ_0' を定むるとき、之に應じて

$$x_0<\xi<x_0' \qquad y_0<\eta<y_0'$$

なる限界 x_0、x_0' 及び y_0、y_0' を適當に定め、以て

$$x_0<x<x_0' \qquad y_0<y<y_0'$$

なる限界内より x、y を如何やうに採るとも、必ず $\zeta_0<f(x,y)<\zeta_0'$ ならしむることを得。或は再び語を換へて言はゞ、先づ豫め隨意に ε を與ふるとき之に應じて適當に δ を定め、以て ξ'、ξ の差及び η'、η の差が絶對値に於て δ を超えざる限り、$f(\xi',\eta')$と$f(\xi,\eta)$ の差をして必ず絶對的に ε より大ならざらしむることを得べきなり。

上述の意義に於て四則の連續的算法なること容易に驗證せらるべき所なり。

種々の連續的算法を一定の順序に引き續き行ふとき、其總結果を一の算法

と見做さば、此算法も亦連續的算法たるを失はず。

言語の簡短を期せんが爲め、例へば $(x+y)z$ なる式によりて示されたる算法の場合につきて說かんに、若し x、y、z に充分接近せる近似値 x'、y'、z' を採り、此等の數に同樣の算法を施こして $(x'+y')z'$ を作り、以て $(x+y)z$ と $(x'+y')z'$ との差をして、如何程にても小なる、豫め與へられたる限界以下に止まらしむることを得べきなり。げにも今 $x+y=s$, $x'+y'=s'$ と名づけんに乘法は連續的算法なるが故に sz と $s'z'$ との差を與へられたる數 ε より小ならしめんと欲せば、z と z' との差、及 s と s' との差をして、ε に應じて適當に定めらるべき數 δ よりも小ならしめば、卽ち可なり。さて加法も亦連續的の算法なるが故に s と s' との差をして δ より小ならしめんと欲せば x と x' 及 y と y' との差をして、δ に應じて適當に定めらるべき數 δ' よりも小ならしめば則ち可なり。是故に今 δ_0 を以て δ、δ' のいづれよりも大ならざる數となさば、x と x'、y と y' 及び z と z' との差にして δ_0 より小なる間は $(x+y)z$ と $(x'+y')z'$ と

の差は ε を超ゆることなかるべきなり。

最一般なる場合に於ても同趣の論法によりて、先づ關係せる數が n 個なる場合をば、n 個より少數の數の關係せる場合に歸着せしめ、以て上述の定理の證明を完くすべし。

有理數の範圍内に於て連續的なる算法は、之を擴張して凡ての數の範圍內に於て連續的なる算法となすことを得。

先づ $f(\xi, \eta, \ldots\ldots)$ は有理數の範圍內に於て連續的なりとするとき

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots\ldots\ a_n\ \ldots\ldots\ldots \tag{1}$$

$$b_1,\ b_2,\ b_3\ \ldots\ldots\ldots\ b_n\ \ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

等の有理列數の極限を、それぞれ α、β ……… となすときは

$$f(a_1, b_1, \ldots),\ f(a_2, b_2, \ldots),\ \ldots\ldots\ f(a_n, b_n, \ldots),\ \ldots\ldots \tag{3}$$

は一定の極限を有す。思想を明確ならしめんと欲せば、例へば α_1、α_2、……を以て α の十進命數法の小數第一、二、……位までを採りて作りたる有理數と做

すべし。げにも

$$\varepsilon_n = f(a_n, b_n, \ldots\ldots)$$

と置き、如何に小なる正數 ε を與ふるとも、之に應じて n を相當に定めて以て

$$\varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n+1}, \quad \varepsilon_{n+2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

の振幅を ε よりも小ならしむるを得べきを驗證せんに、先づ f は連續的算法なるが故に ε に應じて適當に δ を定め ξ、η ……… の變動の限界 δ を超えざる限り $f(\xi, \eta, \ldots\ldots)$ の變動も亦 ε を超えざらしむることを得。さて a_n、b_n …… の極限 α、β …… なるにより δ に應じて n を適當に定め以て a_n, a_{n+1} …… 及 b_n, b_{n+1} …… の振幅をして δ より小ならしむることを得。斯の如く n を定むるときは ε_n, ε_{n+1} …… の振幅は ε を超えず、隨て (3) の列數に一定の極限あり、之を λ と名づく。

さて λ は α、β ……… を極限とせる列數 (1) (2) …… の選擇に關係なし、詳しく

言はゞ

$$a_1',\ a_2',\ \cdots\cdots\cdots\ a_n',\ \cdots\cdots\cdots$$
$$b_1',\ b_2',\ \cdots\cdots\cdots\ b_n',\ \cdots\cdots\cdots$$

等が亦 α、β……を極限とするときは

$$f(a_1',\ b_1',\ \cdots),\ f(a_2',\ b_2',\ \cdots),\ \cdots\cdots\ f(a_n',\ b_n',\ \cdots),\ \cdots\cdots$$

の極限は卽ちゝなり。之を證明せんと欲せば

$$\xi_n' = f(a_n',\ b_n',\ \cdots\cdots)$$

と置きて $\xi_n-\xi_n'$ の極限の0なるべきを示さば則ち足る。假に $\xi_n-\xi_n'$ の極限0にあらずとせば此差の絶對値 $|f(a_n,\ b_n\ \cdots\cdots)-f(a_n',\ b_n',\ \cdots\cdots)|$ は0にあらざる一定の下限を有す。而も a_n と a_n'、b_n と b_n'……との差は n と共に限りなく減少すべきが故に、是れ f が連續的算法なりとの前提に反せり。

以上の觀察によりて次の結果を得。$f(\xi,\ \eta,\ \cdots\cdots)$ が有理數の範圍內に於て連續的算法なるときは有理數 ξ、η……を以て限りなく定まれる數 α、β……に

近迫するとき $f(\xi, \eta ......)$ は常に一定の極限 λ に近迫す。

今若し α、β、...... 等の一部又は全部が無理數なるとき

$$\lambda = f(\alpha, \beta ......)$$

となして、以て無理數の關係せる場合に於ける f なる算法の意義を定むるときは、f は數の全範圍に於て連續的の算法となる。又 f をして連續的ならしめんと欲せば $f(\alpha, \beta ......)$ は λ と異なる値を取ることを得ず。此主張の後半は明瞭なり、其前半を證すること次の如し。

先づ α、β ...... なる定まれる數を採り $f(\alpha, \beta ......)$ を考ふ。α、β ...... に充分接近せる有理數 a、b ...... を採りて $f(\alpha, \beta ......)$ と $f(a, b ......)$ との差をして、如何程にても小なる豫定の限界以內に止まらしむることを得べきことは前文既に述べたり。f が連續的算法なることの證明は、之によりて完きを得たるか、曰く否。吾人は尙それぞれ α、β ...... に充分近き α'、β' ...... を如何にとるとも卽ち α'、β' ...... 等が無理數を含める場合に於ても亦 $f(\alpha, \beta ......)$ と

$f(\alpha', \beta' \ldots\ldots)$ との差をして如何程にても小ならしむるを得べきを證明せざるべからず。今 α、β ……… を含める一定の間隙例へば

$$\alpha_1 > \alpha > \alpha_0 \qquad \beta_1 > \beta > \beta_0 \quad \ldots\ldots\ldots$$

なる間隙を考へ、此間隙の中より有理數 a、b ……… を採りて $f(a, b, \ldots\ldots)$ を作るに、こは a、b、……… の選擇に從て變動すべき數なり。然れども f は連續的算法なるが故に、此變動は前述の間隙と共に定まるべき一定の上限を超えず、此上限を g と名づけ、さて此等の間隙より有理又は無理なる α'、β' ……… を如何やうに選擇するとも

$$\lambda = f(\alpha, \beta, \ldots\ldots) \quad と \quad \lambda' = f(\alpha', \beta', \ldots\ldots)$$

との差 $\varepsilon = |\lambda - \lambda'|$ の決して g より大なるを得ざることを證せんとす。若し假に a は g より大なりとなすときは次の如くにして矛盾の結論に陷る。λ、λ' の差は g より大なりといふが故に例へば λ を λ' より大なりとし $\frac{\varepsilon - g}{2} = \delta$ と置き

$$\lambda > \lambda - e > \lambda' + e > \lambda'$$

なる數 $\lambda - e$ 及 $\lambda' + e$ を作るに此二數の差は恰も g に等し。さて α、β、……に充分近き有理數 a、b、……又 α'、β'、……に充分近き有理數 a'、b'、……を採り、以て

$$f(\alpha, \beta, \ldots\ldots) \text{ 及 } f(a, b, \ldots\ldots)$$

$$f(\alpha', \beta', \ldots\ldots) \text{ 及 } f(a', b', \ldots\ldots)$$

の差をして e より小ならしむることを得、しかするときは

$$f(a, b, \ldots\ldots) > \lambda - e, \qquad \lambda' + e > f(a', b', \ldots\ldots)$$

にして $f(a, b, \ldots\ldots)$ と $f(a', b', \ldots\ldots)$ との差は g より大なり。是卽ち矛盾の結論なり。

是故に前述の間隙に含まるゝ有理數の範圍內に於て f の變動の限界 g を超えざるときは、同一の間隙內に於ける有理無理あらゆる數につきても亦 f の變動は同一の限界を超えず。さて g を如何に小さく豫定するとも、之に應じ

て上の間隙の幅を相當に縮小し、以て此間隙內に於ける有理數につきての f の變動を g 以下に限ることを得べきことは先に證明せる所なり。是に至て此證明は洽く同一間隙內に於ける凡ての數の上に及べり。卽ち擴張せられたる f の仍ほ連續的算法たるを失はざるを確め得たり。

上述の定理を特別の場合に應用して次の結果を得。ξ、η……等の數の間に成立する等式には畢竟 $f(\xi, \eta \ldots\ldots)=0$ なる形を與ふることを得べし。さて若し f にして連續的算法ならば此關係が ξ、η……の有理數なる凡ての場合に證明せられたる上は、直に之を數の全範圍に及ぼすことを得。例へば乘法の交換の法則は $\xi\eta-\eta\xi=0$ なる等式によりて表はさる、さて乘法及び減法隨て $\xi\eta-\eta\xi$ は連續的算法なること、及び交換の法則の有理數の場合に成立することよりして直に此法則の凡ての數につきて成立すべきを推知し得べきなり。是畢竟上述の定理に於て z が常に 0 なる場合に外ならず。

之を要するに、有理數に關係せる連續的算法の意義及び其諸性質は、上述の定

理によりて一々驗證せらるゝを要せず、一擧して盡く數の全範圍に擴張せらるゝを得るなり。

（六）

連續的算法の轉倒を、最簡短なる場合につきて說明せんが爲に、先づ f なる連續的算法に關係せる諸數の中の或一つに特に着眼して之を x と名づけ、其他の諸數を省略して、此算法の結果を單に $f(x)$ と書く。x が或る範圍內に於て變動するときは $f(x)$ も亦之に應じて或る範圍內に於て變動す。若し x の增大するとき $f(x)$ は之に伴ひて常に增大し又は常に減小するときは $f(x)$ は單調の變動をなす又は更に略して f は單調の算法なりといふ。例へば n の定まれる數なるとき $x+n$, $x-n$, xn, $x:n$ 等は數の全範圍を通して單調なり。又 x^2 は x が正數なるときは單調に增大し、x か負數なるときは單調に減小す。

單調なる連續的算法の轉倒は唯一の結果を與へ、此結果は亦單調なる連續的算法なり。

$$y = f(x)$$

を單調なる連續的算法となし、例へば x が a より漸次增大して a' に至るとき y は b より順次增大して b' に至るとなすときは、β を以て $b \ldots\ldots b'$ なる間隙に屬せる或數となすとき

$$\beta = f(\alpha)$$

なる如き數 α は $a \ldots\ldots a'$ の間隙に於て必ず、而も唯一個に限り存在す。隨て β を與へて之に應ずる α を定むること常に可能なるが故に、此手續きは之を β に施こせる一の算法と考ふることを得、此算法の結果は卽ち α なるにより

$$\alpha = F(\beta)$$

と書くとき、F は又單調にして連續的なり、卽ち β が b より漸次增大して b' に至るときは α も亦連續的に a より漸次增大して a' に至る。是卽ちこゝに證明せらるべき定理の内容なり。

先づ轉倒の必可能なるべきを證せん。$b \ldots\ldots b'$ の間隙中より任意に β なる數

を採り、次の如くにして $\alpha\ldots\ldots\alpha'$ なる間隙の數を二群に分つ、$f(\xi)<\mu$ なる如き數 ξ 即ち例へば $\xi=\xi'$ は第一の群に屬し、$f(\xi)>\mu$ なる如き數 ξ 即ち例へば $\xi=\xi''$ は第二の群に屬す。第一の群に屬せる數は凡て第二の群に屬せる數よりも小なり。さて此等兩群のいづれにも屬せざる數ありとせばそは $f(\xi)=\mu$ ならしむべき數にして斯の如き數 ξ の若し存在すとも、唯一個に限るべきことは始めより明白なり。是故に轉倒の可能なるを證せんと欲せば上述の兩群の未だ $\alpha\ldots\ldots\alpha'$ なる間隙の凡ての數を網羅せざるを確むるを以て充分なりとすべし。假に此等の兩群にして $\alpha\ldots\ldots\alpha'$ なる間隙の凡ての數を網羅せりとなさば、連續の法則によりて、第一群に最大の數あるか又は第二群に最小の數あるか、いづれか其一に居らざるを得ず。若し第一群に最大の數あらば、之を γ と名づくるに、γ は第一群に屬するが故に $f(\gamma)<\mu$ 又 γ より大なる數は盡く第二群に屬すべきが故に ε を如何なる正數となすとも $f(\gamma+\varepsilon)>\mu$ 即ち $f(\gamma+\varepsilon)-f(\gamma)>\mu-f(\gamma)$ にして $f(\gamma+\varepsilon)$ と $f(\gamma)$ との差は ε を如何に小ならしむるも決し

て一定の數 $\beta-f(\gamma)$ を超えず。是 f が連續的算法なりとの前提に反せり。第二群に最小の數あるを得ざること、亦同樣にして證明せらるべし。$f(\xi)=\beta$ なる如き、第一群にも又第二群にも屬せざる、唯一個の數 α の存在すべきこと爭ふべからず。

さて β の增大するとき、α も亦之に伴ひて增大すべきこと、論なし。α が漸次增大して α' に至るときは、β は漸次增大して β' となる。β、β' の差をして ε より小ならしめんと欲せば、ε に應じて δ を適當に定め、α、α' の差をして δ よりも小ならしむれば則ち足る。又若し豫め δ を與へ、α、α' の差をして δ より小ならしめんと欲せば、α、α' に該當する β、β' の差をして ε より小ならしむれば則ち可なり。逆の算法 F も亦連續的なり。

f が單調に減小するときは F も亦單調に減小す。又 f の變動の範圍に上限又は下限なき場合に於て施すべき更正は特に縷説を須ひざるべし。

例へば加法、乘法は數の全範圍を通じて單調なる連續的算法なり、故に減法及

び除法も亦然らざるを得ず。

第十一章　冪及對數

冪根の存在、基數及び指數の變動に伴ふ冪根の變動、指數限りなく增大するとき冪根は限りなく1に近迫す○冪の定義の擴張、有理の指數、無理の指數○對數、其性質○開平の演算

（一）

前章に於て連續的算法及び其轉倒につきて說きたる諸の結果を應用するときは、冪根及び對數の說明は極めて簡短なり。

冪の定義を擴張して指數が有理數なる場合及び更に進みて其無理數なる場合に及ぼさんが爲に先づ基數を正數に限り、冪根の性質を論ぜんとす。

x を正數となすとき x^2 は積の特例として連續的算法なり。x が0より順次增大して限なくば x^2 も亦0より增大して究まる所なし。卽ち x^2 は單調なる連

續的算法なり。是故に前章(六八)によりて正數 y を任意に與ふるとき $y=x^2$ なる如き正數 x は唯一個に限り必ず存在す。x を y の平方根といひ、之を表はすに

$$x = \sqrt{y}$$

なる記法を以てす。開平は單調なる連續的算法にして y が 0 より始めて限りなく增大し行くとき x も亦 0 より始めて限りなく增大す。

今指數 2 に代ふるに任意の自然數 n を以てするとき、$y=x^n$ は亦單調なる連續的算法にして其轉倒

$$x = \sqrt[n]{y}$$

も亦然り。x を y の n 次の冪根といふ。冪根の乘法及び除法は次の式による。

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (1)$$

同階級の冪根の乘法、除法は基數の乘法及び除法に歸す。又冪と開法との順序は隨意なり。

即ち a の m 次の冪の n 次の冪根は、a の n 次の冪根の m 次の冪に等し。

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (2)$$

此等の等式を證明せんと欲せば冪及び冪根が單調の算法なるを利用し、兩節の n 次の冪を比較すべし。例へば(1)の第一式を證明せんと欲せば、其兩邊の n 次の冪を比較すれば可なり。$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab = (\sqrt[n]{ab})^n$。 (2)は此等式を因子の數 m 個にして盡く相等しき場合に擴張せるに過ぎず。

指數の定まれるときは冪根の大小は基數の大小に伴ふこと明なり。次に又基數 a を定まれる正數とし、指數 n の變動に伴ふ冪根の變動を考へ次の諸定理を得。

$\sqrt[n]{1}$ は 1 なるが故に、基數 a の 1 より大又は小なると共に、$\sqrt[n]{a}$ も亦 1 より大又は小なり。

基數 a が 1 より大なるときは、指數の增大するに隨ひ冪根は減小す。基數が 1 より小なるときは、冪根は指數と共に增大す。即ち

又

$$n>1,\ m>n \text{ ならば } 1<\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{a}$$
$$n<1,\ m>n \text{ ならば } 1>\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{a} \qquad (3)$$

之を證明するには兩邊の mn 次の冪を比較すべし。$(\sqrt[m]{a})^{mn}=a^n$, $(\sqrt[n]{a})^{mn}=a^m$ にして a の1より大又は小なるに從ひ a^m は a^n よりも大又は小なり。

a の1より大なるときは n の增大するに伴ひて $\sqrt[n]{a}$ は減小す。n 愈〻增大して止まずば $\sqrt[n]{a}$ は愈〻1に近迫して究まる所なし。

證。先づ $\sqrt[n]{a}$ は n の增大するとき減小すれども決して1を下らざるが故に $\sqrt[n]{a}$ は1より小ならざる極根を有す。今假に此極限1より大なりとせば、之を $1+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ と名づくるに

$$\sqrt[n]{a} \geqq 1+\varepsilon \qquad \text{即ち} \qquad a \geqq (1+\varepsilon)^n$$

は n が如何なる自然數なりとも常に成立すべきなり。然れどもこれ有り得べからざる事に屬す。げにも $(1+\varepsilon)^{n+1}=(1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon)=(1+\varepsilon)^n+\varepsilon(1+\varepsilon)^n>(1+\varepsilon)^n+\varepsilon$

即ち $(1+\varepsilon)^n$ は指數1を加ふる每に ε より小ならざる增大を來すが故に

$(1+\delta)^n > 1+n\delta$ にして、此数は n を限りなく増大して以て竟に如何なる数をも超えしめ得べき者なり。

是故に $\sqrt[n]{a}$ の極限は 1 なり。a が 1 より小なるときは $\sqrt[n]{a}$ は n と共に増大して限りなく 1 に近迫す。

（二）

冪の定義を擴張して指数が有理数なる場合に及ぼさんとせば、整の指数につきて一般に成立すべき

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

なる關係を基礎とすべし。此法則にして犯すべからずとせられなば $p=\frac{m}{n}$ を指数とせる冪に之を適用して

$$(a^p)^n = a^{pn} = a^m$$

を得。即ち a^p は之を n 次の冪の昂上して、a^m と等しからしむべき数なり。随て

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{(I)}$$

となさゞるを得ず。又若し之を以て分數を指數とせる冪の定義となすときは、第二章(六)及第六章(二)に說きたる冪の諸性質は、廣義の冪につきても亦盡く成立す。即ち

$$a^r a^s = a^{r+s}, \qquad a^r : a^s = a^{r-s} \qquad (1)$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad (2)$$

$$a^r b^r = (ab)^r, \qquad a^r : b^r = (a : b)^r \qquad (3)$$

今 $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ と置き、便利の爲め n、q は正の整數なりと定むるときは(1)の第一等式は畢竟

$$\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$

なる等式に外ならず、之を驗證せんと欲せば兩邊の nq 次の冪を比較すべし。左邊の nq 次の冪は

$$(\sqrt[n]{a^m})^{nq}\,(\sqrt[q]{a^p})^{nq} = a^{mq}\cdot a^{np} = a^{mq+np}$$

にして（mq、np は正又は負の整數なり）こは明に右邊の nq 次の冪に等し。

(3) の驗證は更に簡短なり。兩邊の nq 次の冪は共に a^{mp} に等し。(4) も亦容易に驗證せらるべし。

$\mu=\frac{m}{n}$ と置けば x^{μ} は $\sqrt[n]{x^m}$ に等しく。卽ち x に二つの連續的算法を引續き施こせる結果なり。是故に指數 μ の定まれるときは x^{μ} は x に施こせる連續的算法なり。基數 x は正數に限り、x^{μ} も亦 μ が如何なる（正又は負の）有理數なりとも必ず正數なり。μ 若し正數なるときは x が 0 より漸次增大して已まざるとき、x^{μ} も亦 0 より漸次增大して究まる所なし。又若し μ が負數なるときは x^{μ} は單調に減小す、而して x が限りなく增大するとき x^{μ} は限りなく減小し、又 x が限りなく減小して 0 に近迫するときは、x^{μ} は却て漸次增大して究まる所なし。

次に基數の定まれるとき、指數 μ の變動に伴ふ a^{μ} の變動を追蹤せんに、先づ基數が 1 なるときは 1^{μ} は μ に關係なく 1 に等し。

基數 a が 1 より大なるときは、先づ ν が 0 なるとき a^{ν} は 1 に等し。ν が正數ならば a^{ν} は 1 より大なり。げにも $\nu=\frac{m}{n}$ と置き m、n を共に自然數となさば、a^{m} は 1 より大にして前節の定理によりて $\sqrt[n]{a^{m}}$ は 1 より大なり。又 ν が負數なるときは $\nu=-\frac{m}{n}$ と置くに a^{ν} は $a^{\frac{m}{n}}$ の逆數に等しく $a^{\frac{m}{n}}$ は 1 より大なるが故に a^{ν} は 1 より小なり。

一般に $a>1$ なるときは a^{ν} は指數と共に增大す、卽ち $\nu>\nu'$ に伴ひて $a^{\nu}>a^{\nu'}$ なり。げにも $a^{\nu}-a^{\nu'}=a^{\nu'}(a^{\nu-\nu'}-1)$ にして $a^{\nu'}$ は固より正、又 $\nu-\nu'$ は正なるが故に $a^{\nu-\nu'}>1$ よりて $a^{\nu}-a^{\nu'}$ は正數なり。

是故に基數 a が 1 より大なるときは a^{ν} は ν と共に單調に增大す。今其連續的なるべきを證せんが爲に先づ ν が 0 に近迫するとき a^{ν} は限りなく 1 に近迫するを示さんとす。先づ ε を 1 より大にして如何程 1 に近き數なりとすとも、前節の定理によりて

$$1<a^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$$

なる如き自然數 n は必ず存在す。さて a^{μ} は μ と共に減小するが故に $0<\mu<\frac{1}{n}$ なるときは

$$1<a^{\mu}<\varepsilon$$

又 μ が負數なるときは μ の絶對値を $\frac{1}{n}$ より小ならしむるとき

$$1>a^{\mu}>\frac{1}{\varepsilon}$$

にして $\frac{1}{\varepsilon}$ は任意に與へられたる1より小なる正數と考ふることを得。

μ が0に近迫するとき a^{μ} の極限1に等しきを確め得たる上は a^{μ} の與へられたるとき

$$a^{\mu}-a^{\mu'}=a^{\mu'}(a^{\mu-\mu'}-1)$$

よりて μ、μ' の差を相當に小となして $a^{\mu-\mu'}-1$ 隨て又 $a^{\mu}-a^{\mu'}$ を如何程にても小ならしむることを得。μ の變動に伴ふ a^{μ} の變動は連續的なり。

a^{μ} を μ に施こせる算法と見做すとき、こは有理數の範圍に於て連續的なるが故に、μ が無理數なる場合に於ける此算法の意義を補充して、a^{μ} を數の全範圍

に於て連續的ならしむることを得。第十章(五)の定理はこゝに其最良の例を得たり。μ が無理數なるときは r_1、r_2、r_3、………を以て μ を極限とせる有理列數となすとき

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ a^{r_3}, \ldots\ldots a^{r_n},\ \ldots\ldots$$

の極限は即ち a^{μ} なり。例へば

$$10^{0,43429\cdots\cdots} = e$$

は

$$10^{0,4} = 10^{\frac{4}{10}} = 2,511886\ldots$$

$$10^{0,43} = 10^{\frac{43}{100}} = 2,691534\ldots$$

$$10^{0,434} = 10^{\frac{434}{1000}} = 2,716439\ldots$$

$$10^{1,4342} = 10^{\frac{4342}{10000}} = 2,717690\ldots$$

$$10^{0,43429} = 10^{\frac{43429}{100000}} = 2,718253\ldots$$

…………………………

等の漸次近迫する極限　2.7182818… に外ならず。

斯の如くにして指數 μ の凡ての値の上に擴張せられたる冪 a^μ を μ に施せる算法と考ふれば、この算法は數の全範圍を通じて連續的にして、基數 a が 1 より大又は小なるに從ひて a^μ は μ の增大すると共に單調に增大し、又は減小して凡ての正の値を採る。

指數が有理數なる場合に於て證明せられたる (1) (2) (3) 等の諸定理は、指數が無理數なるとき仍成立す。第十章(五)を參照すべし。

(三)

基數 a の與へられたるときは a^x は x に伴ひて單調に且つ連續的に變動するが故に、第十章(六)の定理によりて此算法の轉倒は、其結果唯一にして亦單調、連續的なり、即ち y を任意の正數となすとき

$$y = a^x$$

なる條件を充實すべき x は y と共に一定す。x を y の對數(ロガリズム)或は

尙精密に、a を基數としての y の對數と云ひ、之を表はすに次の記法を以てす。

$$x = \log_a y \qquad (y>0)$$

對數は正數の全範圍を通じて連續的の算法にして、基數 a $(a>0)$ の1より大又は小なるに從ひて單調に增大又は減小す。特に

$$0 = \log_a 1, \qquad 1 = \log_a a$$

前節の(1)(2)(3)より次の關係を得。

$$y_1 = a^{x_1}, \qquad y_2 = a^{x_2}$$

と置くときは

$$y_1 y_2 = a^{x_1+x_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} = a^{x_1-x_2}$$

よりて

$$x_1 = \log_a y_1, \qquad x_2 = \log_a y_2$$

より

を得。或は

$$x_1 + x_2 = \log_a y_1 y_2 \qquad x_1 - x_2 = \log_a \frac{y_1}{y_2} \qquad (1)$$

$$\log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a y_1 y_2 \qquad \log_a y_1 - \log_a y_2 = \log_a \frac{y_1}{y_2} \qquad (1^*)$$

積の對數は因子の對數の和に等しく、商の對數は實の對數と法の對數との差に等し。積の場合に於て因子の數二個より多くとも此事實は無論成立す。

又 $y = a^x$, $y^\mu = a^{\mu x}$ より

$$x = \log_a y; \qquad \mu x = \log_a y^\mu \qquad (2)$$

或は

$$\mu \log_a y = \log_a y^\mu \qquad (2^*)$$

冪の對數は基數の對數と指數との積に等し。

對數が實用上の計算に於て極めて重要なるは以上の二性質に基く。之によりて對數表を用ゐて數の乘法除法を其對數の加法、減法に、又冪の計算を對數の

倍加に歸着せしむることを得べきなり。

又 a b を以て二つの正數となし

$$a = b^{\mu} \qquad (3)$$

と置けば

$$a^x = b^{\mu x}$$

にして此相等しき正數を y と名づくれば

$$x = \log_a y, \qquad \mu x = \log_b y$$

即ち

$$\log_b y = \mu . \log_a y \qquad (4)$$

にして(3)より

$$\mu = \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad (5^*)$$

a を基數とせる對數より、b を基數とせる對數に移らんと欲せば、前者に $\log_b a$ を乘ずべし。

基數 a が 1 に等しきときは $1^x=1$ なるが故に、此場合は之を排斥すべし。實用上に於てなさるゝが如く、基數 a を 1 より大となさば、a^x は x が正なるとき 1 より大にして、又 x が負なるとき 1 より小なるが故に、1 より大なる數の對數は正、1 より小なる數の對數は負なり。又基數より大なる數の對數は 1 より大にして、基數より小なる數の對數は 1 より小なり。

常用對數(ブリッグス對數)に於ては 10 を基數とす。10 を基數とするときは

$$y=10^x$$

と共に

$$y\times10^n=10^{x+n},\qquad y:10^n=10^{x-n}$$

なるが故に、y を十進命數法に表はせるとき、y の小數點の位置の變動は、其對數 x に整數を加減するに歸す。是故に若し例へば 1 と 10 との間にある諸數の對數を知らば、之よりして直に凡ての數の對數を知り得べし。

理論上の考究に於て用ゐらるゝは所謂自然對數(ネピール對數)にして、e なる

文字を以て表はさるゝ數を基數とす。e は自然數 m が限りなく增大するとき

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

の近迫する所の極限にして、其値は次の如し。

$$e = 2.7182818284\cdots\cdots$$

對數表の創作者ジョン、ネピールは

$$(1.0000001)^{10000000} \qquad (m = 10^{7})$$

を用ゐたり。

e なる數の起源を說明せんこと此册子の分に過ぎたり。對數表の用法及び對數計算の巨細はた然り。

(四)

開法及び一般に a の計算には、實際上對數表を用ゐるを便利とす。此處には其最簡單なる場合、即ち開平法の演算を簡略に說明せんとす。

正數 a が十進命數法に於て與へられたるとき、其平方根 $\sqrt{a}$ の十進展開を求む。

平方根は一般に無限小数なるべきが故に、求むる所の者は、根の首位若干なり。小数第 n 位卽ち 10^{-n} の位まで計算して根の値 r_n を得たりとせば（n が 0 又は負の整數なるとき亦同じ）

$$10^{-n} > \sqrt{a} - r_n \geqq 0, \qquad r_n + 10^{-n} > \sqrt{a} \geqq r_n$$

よりて a の數字を 10^{2n} の位まで採りて作れる整數を A、又 r_n の數字より成れる整數を Q と名づけ

$$a = (A + \alpha)\,10^{-2n} \qquad 1 > \alpha \geqq 0$$

$$r_n = Q \cdot 10^{-n}$$

と置かば $a \geqq r_n^2$ より $a \cdot 10^{2n} = A + \alpha \geqq Q^2$　さて A、Q は自然數にして α は 1 より小なるにより $A \geqq Q^2$　又 $(r_n + 10^{-n})^2 > a$ より $(Q+1)^2 > A + \alpha$　随て前の如く $(Q+1)^2 > A$ を得。卽ち

$$(Q+1)^2 > A \geqq Q^2$$

Q は其平方 A を超えざる最大の自然數なり。卽ち a の平方根を 10^{-n} の位まで

計算せんと欲せば、a を 10^{-2k} の位まで採りて作りたる整數 A' の平方根の整數部分 Q を求めて之を 10^n にて除すべきなり。

a の數字を一の位より始めて左右に二つづつに句切り、之を

$$a = a_k(100)^k + a_{k-1}(100)^{k-1} + a_{k-2}(100)^{k-2} + \cdots\cdots$$

なる形となす。こゝに a_k、a_{k-1}、a_{k-2} はいづれも百より小なる整數にして、a_k の附數 k は其 100^k の位に屬せるを示せり。k は正又は負の整數又は0なることを得。斯くするときは 10^k は平方根の最高位を與ふ。げにも $\sqrt{a}$ を 10^k の位まで求めんと欲せば、前に言へる所によりて $A = a_k$ にして $Q = q_k$ は其平方 a_k を超えざる最大の整數、隨て1乃至9の外に出です。q_k を定むるには順次1より9に至る整數を點檢すべし。

一般に

$$\sqrt{a} = (q_k q_{k-1} q_{k-2} \cdots\cdots\cdots)$$

と置くときは $(q_k q_{k-1})$ $(q_k q_{k-1} q_{k-2})\cdots\cdots$ は $A = (a_k a_{k-1}), (a_k a_{k-1} a_{k-2})\cdots\cdots$ の平方根の

「整數部分」なり。こゝに q は數字 a は二個の數字の連續を表はせるに注意すべし。根の數字の決定は循進的なり。

今相當の A を採りて根の首位の數字若干個、例へば 10^n の位まで、既に決定せられたりとし、卽ち

$$(Q+1)^2 > A \geqq Q^2, \quad Q = (q_1 \ldots\ldots q_n)$$

なる整數 Q を得たりとし、更に進みて根の數字一個 q_{n+1} を求めんが爲に、a_{n+1}、q_{n+2} を姑らく略して a'、q' と書き、a' を A の結尾に添附して

$$A' = A.10^2 + a' \qquad 100 > a' \geqq 0$$

を作り

$$(Q'+1)^2 > A' \geqq Q'^2, \qquad Q' = Q \times 10 + q'$$

と置く、q' は 1 乃至 9 の數字を點檢して之を定め得べしと雖、其煩勞を成るべく節約せんが爲に、次の計算を行ふ。先づ

$$R = A' - Q^2 \times 100 = (A - Q^2) \times 100 + a'$$

と置き $A' \geqq Q'^2$, $Q'^2 = Q^2 \times 100 + 20Qq' + q'^2$ より

$$\frac{R}{20Q} \geqq q' + \frac{q'^2}{20Q}$$

を得、q'は此不等式に適合すべき最大の整數なり。最故にq'は決して$R:20Q$なる商の整數部分を超えず。此事實を利用してq'を定むる點檢の區域を縮小することを得。Qが二桁以上の數なるときは$\frac{q'^2}{20Q}$は1より小なるが故に、q'は一般に$R:20Q$の整數部分に等し。

既にq'を決定し得たる後、更に根の次位の數字q''詳しく言はゞq_{n-2}を決定せんと欲せば、A'の末尾にa''（卽ちa_{n-2}）を添附して$A'' = A' \times 100 + a''$を作り、又$R' = A'' - Q'^2 \times 100$を求む。$R'$を求むるには

$$R' = (A' - Q'^2) \times 100 + a''$$

$$A' - Q'^2 = (A - Q^2) \times 100 + a' - 20Qq' - q'^2$$

$$= R - (20Q + q')q'$$

を用ゐるべし。

例へば2の平方根を求むるに

$$a = \overset{0}{2}|\overset{-1}{00}|\overset{-2}{00}|\cdots\cdots$$

卽ち a_k は 2、k は 0、a_{k-1} 以下盡 0 なり。先づ $q_0 = 1$, $R = 100$

$$R : 20q_0 = 5 \geqq q_1$$

q_1 は實は 4 なり。次に

$$R' = \{100 - (20 + 4) \times 4\} \times 100 = 400$$

$$R' : 20Q' = 400 : 280 = 1 \geqq q_2$$

此場合には q_2 は 1 なり。此計算をば次の如く排列す。

```
        √2,00000000 = 1,4142……
          1
          ───
          1 00
24          96
          ─────
             400
281          281
          ───────
           11900
2824       11296
          ────────
            60400
28282       56564
          ────────
             3836
```

左側の 2, 28, 282, 2828 は卽ち逐次の $20Q$ にして其右端に該當の q' を添附じて 24, 281, 2824, 28282 を作る。之に q' を乘じて得たる積を逐次引きて R' を作る。又 24, 281, 2824 に其末尾の數字を加へて、卽ち $20Q+q'$ に q' を加へて 28, 282, 2828 卽ち $20Q'$ を得。布置の技巧を看るべし。

又一般に A の平方根の整數部分 Q を定め得たるとき、a を以て 10^{2n} より小なる數となして

$$A_1 = A \times 10^{2n} + a, \qquad \sqrt{A_1} = Q \times 10^n + x$$

と置き、x を求めんとするに、上の關係より

$$\frac{A_1 - 10^{2n}Q^2}{10^n} = 2Qx + \frac{x^2}{10^n}$$

左邊の數を計算して之を R と名づけ、又 x の 10^n より小なるに着眼して

$$2Qx + x > R \geqq 2Qx$$

を得。故に

$$\frac{R}{2Q} \geqq x > \frac{R}{2Q+1}$$

を得。x は $\frac{R}{2Q}$ と $\frac{R}{2Q+1}$ との中間にあり。此二つの商の數字の一致する限りは、卽ち x の首位にして

$$\frac{R}{2Q} - \frac{R}{2Q+1} = \frac{R}{2Q(2Q+1)} < \frac{R}{4Q^2}$$

なるが故に、此等の商と x との差は $\frac{R}{4Q^2}$ を超えず。
例へば 20000 の平方根の整數部分 141 を求め、開平剩餘 119 を得たる時、根の小數部分を求めん爲に

$$\frac{119}{282}=0,421\cdots\cdots$$

$$\frac{119}{283}=0,420\cdots\cdots$$

を計算し、根の數字小數點以下二位を確むることを得たり。
此方法によりて平方根を豫定の位まで定むべき場合に於て、其位數の大約前一半を計算せる後、他の一半を除法によりて決定することを得。

新式算術講義　終

附録

「フート、ノート」といふもの邦文の書に入り難し。本文の各處に添ふべき重なる引用及参照書目を取りまとめて、巻末に附するに當り、印刷の進行中に心つきたる本文の修正追補二三を併せ収む。太き字體、例へば六(九)とは第六章第九節を指す。

一(三)　自然數を論ぜる著書の最勢力ある者二三を擧ぐ。クロネッカー、「數の觀念につきて」(Kronecker, Ueber den Zahlbegriff)此論文はヱドワルド、ツェルラー紀念論文集—Philosophische Aufsätze, E. Zeller zu seinem 50-jährigen Jübiläum gewidmet, 1887—に載せたり。同書又ヘルムホルツ、「數ふること及計ること」Helmholz, Zählen und Messen を載す。クロネッカーの論文はクレルレ巻百一及全集巻三ノ一に轉載せり。クロネッカーは冒頭「予は數の觀念を説明するに最安當なる發足點は順序數にありと信ず」の語を置けり。デ、キンド「數とは何ぞや」Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 1887－93 の所論は更に根本的にして、「物の集まり」及其對照を基礎とせり。開巻先づ「凡そ證明し得べきことは必ず證明せられざるべからず」の語に接す。全篇の論調推して知るべし。其他シューベルト、フレーゲ、シュレーダー (Schubert, Frege, Schröder) 等の書名あり。デ、キンドの所論の一斑はウェーバーの初等數學全書 (Weber, Encyklopedie der Elementar-Mathematik, I. 1903) によりて窺ふを得べし。

二(四)　デリクレーの證明は其整數論講義 (Dirichlet, Vorlesungen über die Zahlentheorie) 第一章に出づ。

二(七)　或數を命數法にて表すは此數を「冪級數」に展開するなり。函數論の思想を數の學(アリスメチック)に應用して成效せる者近時ヘンゼル氏あり。

二(九) の證明中最有力なる論據は關係せる數が盡く自然數なる結果として $a>b$ より直に $a \geqq b+1$ を得るにあり。此點最注意を要す。

三(一) 第六四頁の三條を原則と名づけたり。現代の數學にては之を公理 (Axiom) と稱すべし。而して此三條は又此處に所謂數(正負整數及零)の觀念の定義に外ならず。公理の語誤解を起すの虞ありと信ずべき理由ありて、故らに之を用ゐざりき。

精密に考ふれば次の如き疑問を生ず。曰く、此等の三原則は果して獨立なりや、相互無關係なりや。又曰く此等の三原則は自家撞着を含まずや。例へば第二原則は第一原則の論理上必至の結果ならずや又第三原則は果してよく第一、第二の兩原則と相容るや否や。此重要なる問題は此書全體の調子に諧ふには、餘り高きに過ぎたり。

第六七頁「アルキメデスの法則」の語は便利上假用せるに過ぎず。所謂アルキメデスの法則は第八章に說ける者なり。兩者全く類似の形象を具へざるに非ず。

四(四) 最小公倍數を先にするの便利なること、蓋しポアンソー (Poinsot) の創意なり。

最大公約數を求むる普通の方法、ユークリッドの法式につきては第八章を看よ。

チォファント (Diophant) はアレキサンドリヤの人、紀元三百五十年頃ジュリヤン帝の治下に生存せり。享年八十四歲著書十三卷。一次方程式の解法はチォファントに始まる。整數を係數とし、未知數若干を含める方程式を整數を以て解かんとする問題即ち所謂不定方程式の解法亦チォファントに始まる。故に此種の方程式を一般に、チォファント方程式と名づけ、之を論ずる整數論の一部をチォファンチーク (Diophantik) と云ふ。

四(六) エラトステネス (Eratosthenes) 紀元前二七六―一九四年。

ユークリッド (Euclid) 紀元前三百年。プラトーの門人。著書の最有名なるはエレメンツ (Elements) にして其中十三卷は後世に傳はれり。其幾何學に關せる部分は汎く世に知らる。第七、八、九の三卷は整數論を含む。

偶數にして素數なるは 2 に限る。奇數の素數の中 $4h+1$, $4h-1$ なる形の二種を區別するに、兩者共に無限に存在す。$4h-1$ の如き素數 (3, 7, 11, 19等) の限りなく存在するを證するには

$$4.\ 3.\ 5.\ \cdots\cdots p-1$$

なる數につきてユークリッドの證明を模倣すべし。$4h-1$ の如き形の數は因子として少くとも一個の $4h-1$ なる形の素數を含まざるを得ざるに注意すべし。

$4h+1$ の形の素數 (5, 13, 17 等) の限りなく存在することは、しかく簡單には證明し難し。第六章(十)の結果を用ゐて次の如く此事實を證明することを得。

x^2+1 なる式に於て x を任意の偶數となして得べき數の素數因子は盡く $4h+1$ の形を有す。げにも今 x を或偶數とし、x^2+1 の素數因子（必ず奇數）の一つを p と名づくれば $x^2\equiv-1$ (mod. p)にして第六章(十)の(1)式に於ける e は 4 又 $\varphi(p)$ は $p-1$ 隨て $p-1=4f$ 即 $p=4f+1$ 例へば x を2、4、6、8となすに、$2^2+1=5$, $4^2+1=17$, $6^2+1=37$, $8^2+1=65=5.13$ さて $4h+1$ の形の素數の限りなく存在すべきを證せんに、假に斯の如き素數の數に限ありて 5、13、17、……p に盡きたりとせば、次の如くにして矛盾の結果に陷る。$x=2.5.13\cdots\cdots p$ となして x^2+1 を作るに此數の素數因子は $4h+1$ の形をなし、而も 5、13、17、……p 以外の數なり。

x を奇數となすときは x^2+1 は2を以て整除し得べく $\frac{x^2+1}{2}$ の素數因子は盡く $4h+1$ の形をなせり、例へば $3^2+1=2.5$, $5^2+1=2.13$, $7^2+1=2.5.5$,……

2、3以外の素數は盡く $6h+1$ 又は $6h-1$ の形をなせり、7、13、19…は前者に屬し、5、11、17…は後者に屬せり。$6h-1$ の形の數の素數因子の中には同じ形の者少くとも一個存在せざるべからざるに着眼し

$$2.3.5.7.11\ldots\ldots p-1$$

なる數につきてユークリッドの證明を適用し $6h-1$ の形の素數無限に存在するを證明すべし。$6h+1$ の形の素數の限りなく存在すべきを證せんと欲せば先づ x^2-x+1 に於て x を3の倍數となすとき、此數の素數因子盡く $6h+1$ の形をなせるを認むべし。$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$ を用ゐて前の證明を模倣すべし。

一般に a、b が相素なるときは $ah+b$ の形の素數無限に存在す。卽初項と公差とに公約數なき算術級數の諸項中には限りなく多くの素數あり。此定理は整數論に於て頗る有名にして、ヂリクレーの始めて證明せる所なり。$b=1$ の場合の外、此定理の證明は甚困難なり。

五、 分數の普通の定義はよく知らるゝ事にて又後章に於ても說かるべきにより、此處には故らに新奇の立脚點をとれり。

「分數班」の語は便利の爲め假に用ゐたるに過ぎず、一般に通用すべからず。

五(**五**) 乘法の定義を次の如く言ひ表すは不正確なり。a に b を乘ずるは1より b に達すべき手續きを a に施こすなり。例へば $\frac{2}{3}=\frac{1+1}{1+1+1}$、$a\times\frac{2}{3}\neq\frac{a+a}{a+a+a}$、又 $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$、$a\times 2\neq 1/a+1/a$ 上述の定義を完全ならしめんと欲せば次の如く之を修正すべし。1より倍加及等分によりてbに達すると同様にしてaより倍加及等分によりてabに達す。こは勿論正し、然れども亦平凡なり。bが無理數なる場合には斯の如き定義は用に堪へず。要するに、これ數の觀念

の明瞭ならざりし時代の遺物なり。

六十) フェルマー (Fermat, 1601 − 1665) は法律家にして數學は其閑餘の樂事なるに過ぎず。整数論に於ては空前の碩學なり。

オイラー (Euler, 1707 − 1783) の名は數學の各分科に光輝を放てり。

七、 第七章に說ける如き研究は遠くハミルトンの四元法 (Quaternion) に胚胎せり。グラスマンの Ausdehnungslehre は n 元法とも謂ふべし。斯の如き「異算術」にありては、乘法は交換の法則に遵はず。是に於て數と算法とを區別して算法の定義より生ずる結論と、數の性質に因する結論とを鑑別するの必要を生ず。此見地より飜て有理數及其四則算法を審查す。所謂算法の形式上不易の原則は斯くして生れ出でたり。此原則の命名はハンケル (Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, 1878) に始まる。

グラスマンは合離の算法を表すに ( ) なる記號を用ゐたり、ストルツは ︵ に代ふるに ∘ を以てし ハンケルは函數記法を採りて θ、λ を用ゐたり。吾輩は歷史上の由來に關係なく、印刷の便宜上、合離の記號を本文の如く定めて假用せり。

(二五五頁)「代數的の數」(algebraische Zahl) とは現代の數學に於て重要なる觀念なれども其意義を說明するは此書の企及せざる所なり。但此語につきて注意すべき一條あり。古風の數學書又は通俗數學書(特に或種の初等敎科書)等に於て此語を負數又は所謂不盡冪根などの義に用ゐたる者なきを保せず。然れども斯の如きは當今の數學社會一般に用ゐらるゝ用語例を違犯せる者なり。「代數的の數」とは正又負の整數を係數とせる代數方程式 ($a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0$, $a_0, a_1 \cdots\cdots a_n$ は整數) の根たり得べき數を言ふなり。凡ての有理數、凡ての有理數の冪根、或はこれらに四則を施して得

らるべき數は勿論盡く「代數的の數」の特例なり。然れども代數的の數は未だ斯の如き數に盡きたりと言ふべからず。

算法の形式上不易の原則のみを根據としては、既に「不盡冪根」を說明するにも困難を感ず。試に $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を說明せよ。但この困難は絶對的に排除し得ざるに非ず。然れども「代數的ならざる數」の觀念には此原則のみを根據として到底到着することを得ず。

此種の問題實は最新數學の進步によりて激發せられたる所にして、讀者に豫備の智識を期望せざる此書の範圍以外に屬せりと知るべし。唯あまり時代違ひなる誤解を防がんが爲に數言を費せるに過ぎず。

七(二) (二六六頁)準數單位の語亦此書假に用ゐる所、modulus, Einheit 等を連想す。不關數 (indifferente Zahl —Stolz) 無效數 (nombre d'effet nul —J. Tannery) 等亦可、群の論(Theory of groups) に於ては Einheit 又は identical element 等の語例あり。

七(五) (二八〇頁)(一)の原則より發足して負數の意義を定めたる後再び翻て(一)の原則を驗證す。此驗證の絶對的に必要なるに注意すべし。(一)の諸原則は幸に負數につきても成立せり。大小に關する性質は正數の場合と負數のと全く同一にあらざるに非ずや。正數の原則を無差別に負數に適用すべからず。ダランベル (D'Alembert, 1717–83) の誤解は良好なる訓戒を含めり。

八(二) 吾人が量の原則として擧げたる者は、量の性質の中簡單なるものを無意義に羅列したるにあらず。此等は重複及遺漏なく量の特徴を盡くせる者なり。重複なしといふは此等の原則の中の一が他の者の論理上必然の結果ならざるを言ひ遺漏なしといふは、此等の諸性質を具へたる者は卽ち量なり、量といふ者以外に此等の諸性質を具へたる者なきの義なり。附錄三(一)の部を參照せよ。

量とは增減し得べき者なりといふ通俗の解釋は、量を數學的觀念となすには餘に粗笨なり。(一)に於て凡そ人の感覺に其度を異にする印象を與へ得べき者を量なりといへる亦然り。美醜、苦痛、快樂、問題の難易、說明の巧拙等は數學に所謂量となすこと難し。要するに數學に於て量と稱するものは(二)に述べたる諸性質を具へたる者に限れり。

又こゝに量と稱するは連續的の量に限れり。此故に物の數などは之を量の圈外に排斥せり。

又量の大小加合等は本來一定の意義を有するにあらず。(二)の諸原則に牴觸せざる範圍內に於て如何やうにも之を定めて可なり。(二)にいへる如くにして加合といふことの成され得べきことは必要なり。然れども其は幾通りにもなされ得べきか知るべからず。例へば二つの長さの和をば之をつぎ足せる長さとなすは通常の意義なり。然れども又甲の長さの一端に乙の長さを直角に立て、作れる直角三角形の弦を以て甲乙の和なりといふとも、よく(二)の諸原則に適ふべし。此意義にて a なる數値を有する長さは、通常の意義にて $\sqrt{a}$ なる數値を有する長さなり。量の數値は單位と共に定まるとは計り方の定まれる上のことなり。實は量の數値は計り方と單位とにて定まるなり。

八(二)　アルキメデス（Archimedes）紀元前三世紀シラキュースの人、古代にて最有名なる理學者。

八(三)　「有理區域」の語は亦假設なり。著者は他の處にて此語を他の意義に、卽 Rationalitätsbereich の和譯として用ゐたり。こゝに所謂「有理區域」は其意義之と異なり。該當の語外國にもなきが如し。Commensurabilitätsbereich, domain of commensurability ともいふべき語を造らば便利なるべし。「公度ある區域」又不可なし。

八(七)　ユークリッドの比例論は量の論（Grössenlehre）の基礎なりといふべし。其內容は必しも幾何學に專屬せず。長さを以て抽象的の量の一種の表題と考ふることを得ればなり。

八(八)　三一七頁、分布の稠密なることは未だ連續にあらず。例へば或る定まりたる自然數n及其冪を分母とせる凡ての分數を總括して考ふるに其分布は稠密なり。凡ての有限小數（$n=10$）の分布稠密なり。

八(八)　三一七頁、ナイフにて切るとはDなる點を除去せよといふことに過ぎず。直線の連續は此處にて破壞せらる。然れどもDの右及左に如何なる點をとるとも、其中間には必點（Dより外の）あり。Dの直に右、直に左の點なる者なし。連續の定義はデヾキンドの名著、連續及無理數（Dedekind, Stetigkeit und Irrationalzahlen, 1872）に載す。これ必讀の書なり。

八(九)　無理數の觀念の最嚴正に說明せられたるは輓近の事に屬す。原著としてはワィヤストラス、カントル、ハイネ、メレー、デヾキンドを擧ぐべし。祖述にはタンネリー（J. Tannery, Théorie des fonctions d'une variable réelle, 1886）ヂニ（U. Dini, Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali, 1878）ストルツ（O. Stolz, Allgemeine Arithmetik, 1885）ジョルタン（C. Jordan, Cours d'Analyse, t. I, 1893）其他なほあるべし。

ワィヤストラス（K. Weierstrass 1815—97）の說は前世紀の六十年代よりベルリン大學に於ける講義として世に傳はれるに過ぎず、現時に於ても尙シュワルツ氏によりて同大學の講筵に反復せられつつあり。ビェルマン函數論（O. Biermann, Theorie der analytischen Funktionen, 1887）其梗概を載す。バッタルリーニ、ヂョルナーレ卷十八に於てピンケルレ（S. Pincherle, Battaglini Giornale XVIII.）の詳說あり。ワィヤストラスの無理數の定義は最も直接に無限小數を擴張す。a_1、a_2、a_3……が正の有理數にして $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$,……$s_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$……が盡く一定の（nに關係なき）正數Aを超えざるとき、列數 s_1 s_2 … s_n … が有理數を極限とせざるときは $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$ は一

の無理數 $\alpha = ((a_n))$ を定むるものとなす。

$s_1, s_2, s_3 \cdots s_n \cdots$ が竟に超過し得べき自然數は其數限あり、其中最大なるを h と名づけ、α は 1 を h 個だけ含めりといふ。又 $1/q$ なる幹分數をとり k/q を以て $s_1\ s_2 \cdots s_n \cdots$ が竟に超過し得べき分母 q の分數の中最大の者となし、α は $1/q$ を k 個含めりといふ。

$\alpha = ((a_n))$ と $\alpha' = ((a'_n))$ との相等しとは α 及 α' が 1 及び凡ての幹分數を同數だけ含めるを言ふ。大小の意義亦同様にして定むべし。$\alpha\ \alpha'$ の和は $((a_n + a'_n))$ にして $\alpha\ \alpha'$ の積は $((a_n a'_n))$ なり。以下類推すべし。

カントル (G. Cantor, Mathematische Annalen, 5.) は第十章(四)に略述せる所謂基本列數を以て數の定義とせり。ハイネ (E. Heine, Crelle, 84) メレー (Ch. Méray, Nouveau précis d'analyse infinitésimale, 1872) 亦大同小異なり。

デヾキント(上出)は有理數の切斷を以て無理數の定義となせり。第九章を看よ。

此等の諸說に於てはいづれも有理數を既知の觀念となし、之を基礎として無理數の觀念を定む、其方法開發的 (genetisch, heuristisch) なり。

ヒルベルト (D. Hilbert, Göttinger Nachrichten, 1900) は之に反し、「アキシオマチック」(axiomatisch)(幾何學的)に數の觀念を組み立てたり。即先づ數の觀念の內容を既定とし、若干の相互獨立せる公理を立し之を分析して數の觀念を闡明せんとするなり。ヒルベルトによれば數とは、比較の法則、算法(四則)の法則及連續の法則に從へる者なり。但連續の法則はデヾキンドの法則と異にして「アルキメデス」の法則及完備の法則 (Axiom der Vollständigkeit) より成る。

此書に於てはデヾキンドの連續の法則を採りて、アキシオマチックの方法に準じ以て數の觀念を説明

せり。但本邦の一般讀書界の程度を顧慮して、形式的に論理の最嚴密なるを期せざりき。上記の諸書に於ける叙述の調子概して全く量の觀念を離れ、最抽象的に卒然として無理數の定義を立し數と量との關係は讀者の推考發明に一任せり。而して讀者の多數は其自ら補充すべき所の者を自ら補充することをせずして、之を說明の不明に歸せしめんとするの傾向を有するが如し。此種の叙述は論理上間然する所なしと雖、一般讀者の讀書力を信用すること多きに過ぎたりと謂ふべし。予の舊著「新撰算術」に於ても紙幅節儉の爲此種の叙述法を採りたり。

今此書に於ては先づ量の性質を說き、凡ての量の數値を供給すべしとの要求を以て、數の定義の基礎となし以て數の觀念の「心理的」(?)側面を說明せんとせり。斯の如くにして無理數の定義の唐突の感を起すを避くるを庶幾せんとす、著者が微意の存する所なり。

既に量の性質より數の觀念を誘出す、說明の方法は勢「アキシオマチック」ならざるを得ず、第八章の終に於て數の原則として列擧せる所の者に具體的の根據あり。何故に(如何なる目的の爲に)斯の如き原則を立て、之を數の定義となせるか。他なし、量の數値を供給すべしとの要求に應ぜんが爲なり。無理數の定義は天上より落下せるに非ざること明なり。

數の原則は定まれり。さて所謂「アキシオマチック」の方法によりて數の觀念を確定するには、次の徑行を要す。第一、此等の原則を論法の根據として、此等の原則によりて定めらる、觀念の內容を分析すること。第二、斯の如くにして定まれる數なる者が果してよく基本の原則に適合せりや否やを審査すること是なり。第七章の論脈を對照すべし。

此等原則より數の觀念を定むること、之を縷說すれば、實質的に第一章乃至第七章の所說を反復せざるべからず。今其端緒を略叙せば次の如し。

原則によりて０は最小の數なり。０より大なる任意の一數をとり之を１と名づく。原則によりて１＋１なる數あり、原則によりて此數は０よりも又１よりも大なり。此數を２と名づく。３、４…類推すべし。さて連續の法則は等分の可能を保證す。（第九章（三）を看よ）$x+x=1$なる如き數x唯一個あり、之を$\frac{1}{2}$と名づく、云々。斯の如くにして自然數及分數を定む。無理數の觀念は第九章に詳述せり。さて斯の如くにして定まりたる有理無理凡ての數の系統がよく基本の諸原則に適合せるを驗證すること容易なり。驗證は容易なり。困難は斯の如き驗證は何故に必要なるかを悟るの點にあらん。

○無理數は irrational number の譯語なり。原語の意義は（著者が獨逸の某碩學より聞ける所によれば）比(ratio)ならざる、詳しく言はゞ二つの自然數の比ならざる數といふにあり。普通の字書にて語原を尋ぬるも亦同樣の說明に歸するが如し。さもあるべきことなり。「無理」の語或は妥ならじ。今は姑らく慣用に從ふ。但無理數は「ムリ數」なり「理無き數」にては勿論なし。「有理」亦同じ

九(一) （三二八頁）λがSの上限にして、而もSに屬せざるとき卽Sの最大にはあらざるときは、上限の定義の第二條はSの數の中λ'より大なる者限りなく存在すべきを示す。げにも定義によりてSの數の中λ'より大なる者少くとも一個あり。今假にSの數にてλ'より大なる者、卽今考ふる所の場合に於てはλ'とλとの中間に存せる者、其數限ありとせば、此等の數の中一個最大の者なかるべからず、之をgと名づくるにgはλより小なり。是故にgとλとの間にも亦Sの數あり。是容すべからざることなり。一五三頁を參照せよ。

上限下限(obere und untere Grenze)の觀念はワイヤストラスに始まる。バッシュ(上出)は Grenze に代ふるに Schranke の語を以てす。未だ適切なる譯語を得ず。要するにワイヤストラスの所謂上下

限は三二八頁の二箇條の定義によりて定めらる。單に其第一條件のみを充實せる數又往々上下限と稱せらる、と區別すること肝要なり。上限下限と最大最小との區別は次の例によりて特に明瞭に了解せらるべし。先づ一の定まれる圓を考へよ、此圓に內接する凡ての三角形の面積の最大は卽ち此圓に內接する正三角形の面積なり。又此圓に內接する凡ての多角形の面積に最大なし。圓の面積は其上限なり。

Sが無限に多くの數より成れる場合に於ても、若しSを組成せる數が盡く正の整數なるときは、Sには必ず最小の數あり。げにも今aを以てSに屬せる整數の一つとなすときはa若しSの最小の數ならずば、Sの數にてaより小なる者には其數限りあり。よりて上述の主張の成立するを知る。一般に分布稠密ならざる數の範圍內にありては、最大又は最小の必ず存在すべきこともあるべし。是故に一三〇頁第四行に於て「其數に限りあり、是故に」の句は不用なり。

九(三) (三三六頁) $a > x$ なる數xの存在すべきことは、分布の稠密のみを根據として論證することを得たり。故に此事實は有理數の範圍內にても成立す。

九(四) (三三八頁) α、βが相異なるとき、此等二數の中間に無限に多くの無理數あること勿論なり。試に之を證明せんこと恰好の練習問題なるべし。

(三三九頁) $\gamma > \gamma'$ ならざることの證明冗長に失せり。$\gamma > \gamma'$ なりとせばγ、γ'の中間に橫はれる有理數の一つrを考へよ。さてrは甲に屬するか。曰く否、γは甲の下限にしてrはγより小なるが故に、rは甲に屬するを得ず。然らばrは乙に屬するか。曰く否、γ'は乙の上限にしてrはγ'より大なるが故に、rは乙に屬せず。卽ちrは甲にも乙にも屬せざる有理數なるべし。甲、乙は全體に於て凡ての有理數を網羅せるが故に、斯の如き有理數rは存在するを得ず $\gamma > r > \gamma'$ なるが如き有理數

rの存在せざるはrのr'より大なるを得ざるなり。

(三四〇頁)　$\frac{\varepsilon}{2}$を採ること此證明に絶對的必須なるには非ず。εを任意に二つの正數の和となし$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$と置き、唯$\varepsilon_2$をして$\lambda$より小ならしむ。さて$\lambda+\varepsilon_1>a>\lambda$なる如き有理數$a$は甲に屬し、又$\lambda>b>\lambda-\varepsilon_2$なる如き有理數$b$は乙に屬し、而して$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2>a-b$なり。$\varepsilon_1$ ε_2に代ふるに$\frac{\varepsilon}{2}$を以てするは言語短縮の爲なるに過ぎず。此種の論法に慣れざる讀者の爲に、特に之を言ふ。

九(六)　三四八頁。3, 141592……が或數を表せりといふに當り、「……」を以て略示せる諸係數は定まれる數なるべきを要すること勿論なり。

九(十一)　比例式よりして數の四則算法を定むる徑行につきては例へばウェーバー氏代數學一の卷序論 (H. Weber, Lehrbuch der Algebra I. 再版 1898) を參照せよ。

十(一)　三八二頁。$\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$より成れるSの集積點の例はデニ(上出)より採れり。$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$は集積點にあらざることを證せよ。又0及$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$……$\frac{1}{m}$…の外に集積點なきを證せよ。Sの諸數を圖に表はせ、集積點の意義明白に理會せらるべし。

十(二)　間隙を順次十分する代に二分するも亦可なり。しかするときはrは2を基數とせる展開によりて與へらる。此論法によりて或數の存在を證明すること、蓋しワイヤストラスに始まる。

十(四)　カントル、メレーの無理數論、上文を參照せよ。無理數の定義を最卑近なる方法によりて與へんと欲せば、之を無限小數によりて定めらるゝものとなすべし。無限小數は實にカントルの基本列數の特例なり。かくして無理數の意義を定むるときは其大小の意義は九(七)に於けるが如くにして定

むべし、然れども四則の算法の說明は複雜となる。九(六)(九)を參照せよ。

十(五) 連續的算法、實は連續的函數なり。されども此書に於て函數の語を用ゐるの必要なきにより故らに之を避けたり。但こゝに算法といへる語は之を最廣義に解釋すべし。

(四〇三頁) f が必しも有理數の範圍內に於て連續的なるを要せず。一般に分布稠密なる數の範圍內(例へば有限小數の範圍內)に於て連續的なるときは、f を擴張して數の全範圍に於て連續的なる算法となすことを得。

「有理數の範圍內に於て連續的なり」といふ語の意義は說明を須ひずして明白ならん。

十(五) の定理は有名なり。例へば Schönflies, Bericht über die Mengenlehre, 1900 を看よ。

十一、冪の定義の擴張、其連續的なること等を說くに十(五)(六)を用ゐるときは、大に計算を節約することを得。例へば此章に於て「二項定理」を用ゐず。十(五)(六)に說きたる定理は稍ゝ複雜なれども、事實は頗る明透にして、證明も亦甚だ困難ならず。冪及對數につきて十(五)(六)の定理の證明を反復すること良好なる練習なるべし。

十一(一) 四一五頁。此處には正數の平方根の中負なるものを採らず。n 次の冪根の數 n 個なることはこゝに說く所と傾向全く異なる事實なり。

十一(二) 冪の一般の定義はアーベル(Abel) コーシー (Cauchy) のなせる如く $f(\xi)f(\eta)=f(\xi+\eta)$ 及 f の連續的なること $f(0)=1,\ f(1)=a>0$ を基礎として定め得べし $f(\xi)=a^{\xi}$

十一(四) ネピール (John Napier, 1550—1617) スコットランドの人。「ロガリスム」の語を創む。其書千六百十四年を以て世に出でたり。ネピールに先つこと數年瑞西の人ヨースト、ビュルギ (Joost Bürgi, 1552—1632) 既に對數を發見せるも、秘して世に示さず。創見の桂冠を失ふ。

ブリグス（Henry Briggs）ネピールの友、其對數表は千六百十七年及同二十四年印行せらる。

〇一つの有理數と一つの無理數との和、差、積、商は無理數なり。α が無理數にして r が有理數なるときは、$-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha+r$, $r\alpha$ は盡く無理數なり。α、β 共に無理數なるときは $\alpha\pm\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha:\beta$ は必しも無理數ならず。

a が有理數にして、而も或有理數の n 次の冪に等しからずば $\sqrt[n]{a}$ は無理數なり。$\sqrt[n]{a}$ は即ち所謂不盡冪根なり。若干の有理數の間に四則及び開法を施こして作り得べき數、例へば $1+\sqrt{2}$, $(\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}):\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の如き數を現今の數學にて「根數」Radicalzahl, Wurzelgrösse と言ふ。

往昔は斯の如き數を代數的の數といへり。現時にありては代數的の數といふ語は一層廣き意義を有し、根數は其特例となれり。（上文參照）

不盡冪根を含める根數は無理數なり。然れども無理數必しも凡て根數ならず。例へば 1 と 2 との中間に $x^5-5x=5$ なる如き數唯一個あり。此數は無理數なり。然れども根數にあらず。e、π は無理數なれども根數にはあらず。「代數的の數」にてもなし。此種の事實は高等數學の圈內に屬せり。唯無理數と根數との混同すべからざるを忘るべからず。

學用語對譯

相素なり relatively prime.

因數(因子) factor.

エラトステネスの篩 sieve of Eratosthenes, crible d'Eratosthène.

數 number, Zahl. 有理— rational— 有限小— finite decimal fraction, endlicher Decimalbruch. カルヂナル— cardinal—, Cardinalzahl, Grundz. 幹分— Stammbruch, fraction primitive. 既約分— irreducible fr., fr. in the lowest terms. 奇— odd n., n. impair, ungerade Z. 偶— even n., n. pair, gerade Z. 合成— composite n., zusammengesetzte Z. 自然— natural n. 順序— ordinal n. 小— decimal fraction, Decimalbruch. 循環小— recurring d. f., f. d. periodique, periodischer D. 正— positive n. 整— integer, whole n., entier, ganze Z. 素— prime n. Primzahl. 分—fraction, Bruch. 負— negative n. 無限小— infinite d. f.

下限 untere Grenze (— Schranke).

加法 addition.

間隙 interval.

基數 (冪の、對數の、) base.

基本列數 Fundamentalreihe.

記數法 notation (of a n.) numeration écrite.

近似値 approximative value, Näherungswert.
極限 limit, Grenze.
組合はせの法則 associative law, a. Gesetz.
係數 coefficient.
減法 subtraction.
桁 order, Stelle.
公倍數(最小—) common multiple, least— —; gemeinsames Vielfaches, kleinstes— —
公約數(最大—) common divisor, greatest—, gem. Teiler, grösster— —
公約數なき量 teilerfremde Zahlen.
公約なき量 incommensurable quantities.
交換の法則 commutative law, com. Gesetz.

算法 operation 順の— direct— 逆の—inverse— indirect— 合の— Thesis 離の— Lysis.
算法の形式上不易 Permanenz der formalen Gesetze.
最大、—小 maximum, minimum.
四則 vier Species.
指數 exponent, index.
振幅 Schwankung.
週期 period.
集積點 Häufungsstelle, Verdichtungspunkt, point limit.

數字 figure, digit, Ziffer.

乘法、—數、被—數、 multipli-cation, -er, -cand.

除法、—數(法)被—數(實) divi-sion, -sor, -dend.

十進法 decimal system.

上限 obere Grenze (—Schranke).

循進的、(循環的) recursive.

絕對値 absolute magnitude, valeur abs. abs. Betrag.

切斷 Schnitt.

相合式 congruence.

單位 unit, unité, Einheit.

單調 monoton.

對數 logarithm 自然— natural — 常用— common— log. vulgaire, gemeiner Log.

抽象の量 abstract quantity.

轉倒 inversion, Umkehrung.

展開 development, expansion, Entwickelung.

程度まで(δの—) à δ près.

倍數 multiple, Vielfaches.

倍加 Vervielfältigung, multiplication.

比 ratio, rapport, Verhältnis. 比例 proportion.

標準形式 normal form.

分配の法則 distributive law, dis. Gesetz.

部分的分數 partial fractions, Partialbrüche.

分母 denominator, Nenner —子 numerator, Zähler.

符號(正負) sign, Vorzeichen. —の法則 rule of the signs.

不定方程式 indeterminate equation, unbestimmte Gleichung.

冪 power, puissance, Potenz. —根 (radical) root, racine, Potenzwurzel.

法、(相合式の) modulus.

命數法 numeration, Benennung

約數 divisor, submultiple, Teiler. 眞の— proper d., eigentlicher T. 假の— improper d., uneig. T.
  塡補— complementary d.

ユーグリットの法式 Euklidisches Algorithmus.

量 quantity, Grösse. 具體的の— concrete— 抽象的の— abstract—

連續 continuity, Stetigkeit —的 continuous, stetig.

列數 series, Reihe. (Zahlenreihe) 無限— infinite s., unendliche Reihe.

附錄終

明治三十七年六月廿五日印刷
明治三十七年七月[illegible]日發行

新式算術講義

定價金壹圓

著作權所有

著者　東京市日本橋區本町三丁目八番地　高木貞治

發行者　東京市京橋區築地三丁目十五番地　大橋新太郎

印刷者　野村宗十郎

印刷所　東京市京橋區築地二丁目十七番地　株式合社東京築地活版製造所

發兌元　東京市日本橋區本町三丁目　博文館

理學博士　高木貞治君著

新撰算術

▲並製　正價四拾錢　郵稅八錢
▲特製　正價五拾五錢　郵稅拾錢

第一章　整　數
自然數の觀念◉和◉差◉積◉商◉零◉冪◉除法の擴張◉十進法◉十進法に於ける四則の演算◉數の整除

第二章　整數の性質
最大公約數◉相對的素數◉二個以上の數の最大公約數、其他

第三章　分　數
豫備◉分數の觀念◉分數の和及差◉分數の積及商◉二三の重要なる定論其他

第四章　冪　根
冪及冪根◉不盡冪根◉開法の演算

第五章　無　理　數
無理數の定義◉同相等及大小◉同四則算法◉同定義の擴張◉同第二の定義其他

・第六章　量及其測定
量の定義◉量を計る事◉比◉直線の長さ◉平面多角形の面積◉多面體の容積其他

結　論
最後の回顧◉負數◉虛數

理學博士　高木貞治君著

新撰代數學

▲並製　正價四拾錢　郵稅八錢
▲特製　正價五拾五錢　郵稅拾錢

序論　代數學の原則◉負數◉代數的の大小不等式◉虛數◉虛數の幾何學的表示

有理函數　一元整函數◉同積◉二項定理◉除法◉剩餘の定理◉整除◉最大公約◉有理函數◉一元整函數の展開其他

方程式の根　根、複根◉整函數の連續性◉根の存在◉挿入法及分割整函數の有理分解　分解可能及不能◉既約方根式◉ガウスの定理◉分解能否の決定其他

多元整函數　多元整函數の形式及其相等◉同次函數一般多元整函數の項の數◉多元整函數の分解◉同一展開

對稱式論　ルヲの置換◉對稱式◉冪和◉基本の定理の證明◉同第二の證明其他デ、ルミナンド（定義性質其他六節）

二次形式論　代數形式、（一次變形式其他五節）

三次及四次方程式の解法　（方程式の代數的解法外十一節）

理學士　林鶴一君著

新撰幾何學

▲並製　正價四拾錢　郵稅八錢
▲特製　正價五拾五錢　郵稅拾錢

第一章　緒　論
空間の性質◉延線法◉歸納法◉幾何學は純然たる延繹的科學◉絕對的確實◉幾何學は主觀的に研究せらる外四

第二章　ユークリッド幾何原本に於ける最初の三編
第一編　幾何原本第一編命題第一より第四十八迄
第二編　ユークリッド幾何原本第二編命題一より十四
第三編　ユークリッド幾何原本第三編定義◉命題一より三十七

第三章　非ユークリッド幾何學
非ユークリッド幾何學◉公理等十二◉公理第十二と平行線に關する諸命題との關係◉命題第二十七は命題第十六の對偶なり◉平行線は一にあらずして數限りなく多きやも知るべからず◉之れを決定するは命題第二十九◉外七十七

理學士 松村定次郎君著

新撰 解析幾何學

▲並製 正價四拾錢 郵稅八錢
▲特製 正價五拾五錢 郵稅拾錢

第一章 點 平行坐標—二點間の距離—二點間を定比に分つ點—三角形の面積外五節
第二章 軌跡 方程式の軌跡—軌跡の方程式
第三章 直線 直線の方程式—平行直線—二定點を通ずる直線の方程式—截片を與へたる直線の方程式—方向餘弦と坐標—距離—二直線の交點の坐標—二直線の交點を通ずる直線の方程式外六節
第四章 圓 圓の方程式二節—圓の切線の方程式—圓の法線の方程式—二圓の交點の坐標—二圓の交點を通ずる圓の方程式—圓の極方程式外一節
第五章 坐標の變換 五節
第六章 楕圓と雙曲線 楕圓の方程式外十四節
第七章 抛物線 抛物線の方程式外六節
第八章 二次曲線 二次曲線の種類—有心曲線—無心曲線等

理學士 松村定次郎君著

新撰三角法

▲並製 正價四拾錢 郵稅八錢
▲特製 正價五拾五錢 郵稅拾錢

第一章 緒論
第二章 圓函數
第三章 圓函數の諸公式
第四章 定角の圓函數値
第五章 雜問題
第六章 平面三角形
第七章 球面三角形
第八章 反圓函數
第九章 角の弧度と圓函數
第十章 ドウモアブルの定理及其應用
第十一章 圓函數と指數函數との關係
第十二章 因子分解法
第十三章 圓函數級數の和
第十四章 廣義に於ける圓函數
第十五章 雙曲線函數
第十六章 圓函數の無限積形式
第十七章 圓函數の微分法
附 公式表

理學士 松村定次郎君著

新撰 微分積分學

▲並製 正價四拾錢 郵稅八錢
▲特製 正價五拾五錢 郵稅拾錢

第一編 微分學
第一章 微分學總論
第二章 微分係數
第三章 函數の微分法
第四章 基礎函數の微分法
第五章 疊次微分係數
第六章 偏微分係數
第七章 疊次偏微分係數
第八章 函數の展開
第九章 不定形式の極限値
第十章 極數の極大極小

第二編 積分學
第十一章 不定積分
第十二章 定積分
第十三章 曲線の長さ
第十四章 面積
第十五章 體積

理學士 藤田外次郎君著

商業叢書 **商業數學**

特製本洋布上綴 正價七拾錢 郵稅拾錢
洋裝大判並綴 正價五拾五錢 郵稅八錢

第一編 純正數學

檢算法―加法―減法―乘法―除法〇百分算〇省略算―加法及減法―乘法―除法・開平方―開立方〇普通級數―等差級數―等比級數―二項法〇對數―理論對數―常用對數―得數の精密の度〇確からしさ―加法及び乘法―一般の定理

第二編 商業數學

緒論〇概念〇貨幣〇損益〇破産〇手數料及び口錢〇運賃及び倉敷料〇租稅〇利息算〇銀行事業及び計算〇外國爲替〇放銀〇仕拂期日平均法〇差引勘定仕拂期日平均法〇殘高〇交通計算〇會社及び會社決算〇年金算―確定年金―生命年金〇保險―海上保險―共同海損―單獨海損〇火災保險〇生命保險

普通教育の發達に伴ひ商業算術に關する著書亦少からず、されど其多くは唯單に計算應用に外ならずして、其理論の湧出する本源を討究せるもの絶無と稱するも可なり、故に苟も商業に從事し單獨に研究せんと思ふ士に向て能く大要を了解せしむるの良書無き豈商業の進步上深く嘆すべきことならずや著者茲に愛ふる所ありて專門を研究するの傍英を拔き華を摘み煩に走らず冗に失せず能く其綱要を點綴して大成せられたるものは實に本書なり商業學校に於ける無二の好參考書にして商業算術の指針たるもの本書を措て又他に何にかある

工學士 重見道之君著

工業叢書 **工業數學**

中判洋布上綴 正價九拾錢 郵稅拾錢

第一編 總論 頁
第一章 度量衡及複單位……一
第二章 數字的定數及公式……一二

第二編 直線上の運動及力
第一章 直線上の運動……五七
第二章 力及衝突……八四
第三章 仕事、エネルギー、パワー……一三五

第三編 一平面上の力
第一章 力の平行四邊形槓桿及一平面に働く諸力……一七〇
第二章 重心……二六四
第三章 仕事及エネルギー……三〇五
第四章 機械……三三四
第五章 摩擦……三六六
第六章 定加速度を受くる運動―彈道……四〇三

工業の進步は其實地を經濟的に發達せしむるにあり、吾國工業の遠く歐米に及ばざる所以のものは主として實地工業者の學理に精通せざるに因る、特に其基礎たるべき應用數學の智識に缺如せるを以て、其端緒を得るに苦み遂に學理を難解のものとして浩然自失せるもの少しとせず著者茲に感ありて遂に本書を著はす。本書は專ら工業學校、工手學校、鐵道學校生徒の參考及び土木、造兵、造船、建築等の實物工業に從事するもの、獨習用たるを期すれ共、又尋常中學高等學校入學受驗生の物理數學問題の練習用として最も親切なる方法を採れり、初學者が高尙なる研究をなすの階梯は實に本書の特質にあり

佐久間文太郎君著

中等教育 **算術教程**

△正價金四拾錢　郵稅六錢

大判洋装　並級紙數　二二〇頁

第一編　整數及び小數
●整數四則の溫習●小數四則

第二編　諸等數
●諸等數の緒論●米法●諸等數化法●同加法●同減法●乘法●除法●外國度量衡及貨幣

第三編　整數の性質
●約數及び倍數●素數及び非素數●最大公約數●最小公倍數

第四編　分數
●分數の緒論●同化法●同加法●同減法●同乘法●同除法●分數雜問●循環小數

第五編　比及び比例
●比●比例●單比例●複比例

第六編　諸種の問題解法
●連鎖法●比例配分●混合法

第七編　步合算
●步合の計算●損益及び手數料●租稅●保險●利息算●公債及び株劵●手形及び割引

第八編　開方
●冪及び根●開平法●開立法

附錄
●除盡法●外國爲替●求積

本書特色の一端を擧ぐれば、商事要項の科目と連絡の注意せられたると、僅に二百頁の册子に能く其大綱を漏さず、簡にして要を得たると、教師に說明の餘地を與へんが爲め其說明を單に算術教授の主腦たる事項に止めたるとにあり、而して更に本書の誇る所は、啻に商業學校用に適するのみならず、教師の運用如何により中學校師範學校用として、亦絕好の新教科書たるべきにあり

理學士　藤田外次郎君著

文部省檢定受驗用 **新撰數學講義**

全二冊　洋装中判

△上卷算術及代數　△下卷幾何學

△正價一冊金參拾八錢　郵稅一冊六錢宛

從來我國に行はるゝ數學教科書夥多ありと雖大概ね中學教育のものに止まり其程度甚卑近なり其中學程度以上のものに至りては其類非常に少なく偶々是あるも只一學科に限らるゝか或は問題の機械的解法に止まるものとす本書は此缺を補はんが爲めに編述せられ重きを理論に置きたるを以て普通教科書に洩らされたる稍高尙なる理論は細大洩す所なく加之應用問題に詳細なる解法を與へ理論及應用相待つて完全を期せしむ卽上卷にありては算術の主眼たる四則應用問題を特種の順序に配列し凡ての種類を網羅して殘す所なく代數學に於ては、其主要なる代數式の運算より筆を起して代數方程式の起源及解法の原理を詳述して餘蘊なし本書は其形式に於て一小冊たるを免かれざるも中學卒業以上の學生及文部省檢定受驗者の一讀を逸すべからざる良書なりとす

三田暉信君著

實用 數學一萬題

全一冊 中判洋裝

▲正價金四拾錢　郵稅八錢

數學題林の書世間其類に乏しからず、然れども其多くは皆算術のみに止まり、代數幾何等に至る迄悉く網羅したるもの之あらず、加ふるに其類題の撰擇宜しきを得ず實用に適するもの甚だ少し、此書は世間有り觸れたる題集の書と異り、範圍を大にして博く代數幾何に至るまで皆之を聚集したるのみならず、題集一萬皆實用に適するもの丶みを撰び、且受驗者の便を計り、官私立各學校の實地試驗問題は皆之を集めたれば、大小學校の教科書は勿論、苟も數學に志ある者には缺くべからざる良書なり。

理學士林鶴一君著（文部省檢定濟）

初等平面 三角法教科書

中判全一冊 洋布上綴

▲正價金四拾錢　郵稅四錢

本書は題せるが如く初等平面三角法を述ぶるものなれば決して高等なる命題又は設問を含まず說明は平易簡單なることを旨とし極めて難澁複雜なることを避けたり問題の數は少なきに過ぐるの嫌ありと雖も中學課程の適度なることに注意せり殊に簡易なる測量の實習は之れを忽にすべからざるが故に其初歩を解述せり

受驗問答叢書中數學書類

竹貫登代多君三著

八編 新撰算術問答

洋裝袖珍 正價廿錢 郵稅四錢

此書は題名の如く算術の要旨を問答體に記述せしものなり左れば一の疑問起らんか本書直に之を解すべし、即ち記憶すべき算法は勿論總て必要なる事柄は悉く之を網羅し詳細に答案を下したるものなり卷末には各學校における試驗問題を揭げ之に解義を付せり

九編 新撰代數問答

洋裝袖珍 正價廿錢 郵稅四錢

竹貫先生代數問答を著す學生諸氏は之に依て以て教室における筆記の缺を補ふを得べく又不審の事ある每に本書を繙けば詳細なる答案を得隨て其疑團は直に氷解すべし卷末に參考として諸官立學校の試驗問題の解義を付せり

十編 新撰幾何問答

洋裝袖珍 正價廿錢 郵稅四錢

本書は主として著者が曾て編述せし平面幾何學教科書に據り一形ごとに其屬する所の定理を集錄し以て之に證明せり則ち閲覽諸氏に在つては其求むる所の形に就て其定理を探討し得べし尙卷末には三十四年以後に於ける各校の幾何問題を蒐錄して悉く詳解を加へたり

順天求合社々長 松見文平君校閲
片山清謙君 三田暉信君共編

理論應用 普通算術

洋裝中判並製 正價參拾錢 郵稅 六 錢

本書は官立學校の學生々徒及び世の算術に志すもの、爲めに編述せしものにして、原書はスミス氏の算術敎科書に取り、傍ら有益なる諸問題を蒐輯し、以て理論、適用の兩能を得せしめんと期し、編中載する所の理論若くは各種の例題は、勉めて選擇に注意し特に官私立諸學校の試驗問題の如きは大抵輯錄して洩らすことなし、故に一度本書を繙くときは、數理を究め得るの傍ら應用術に通じ、始めて實用の數學家となるを得べし、殊に本書は夙に數學を以て名ある順天求合社出身諸氏の手に成り社長松見氏の校閲を經たる者なり。

數學遊戲

英國數學大家ロースボール氏著
攻玉社數學敎師竹貫登代多君閲
竹貫直人君譯

洋裝袖珍並綴 正價貳拾五錢 郵稅 四 錢

竹貫登代多君著

算術手引草

洋裝中判美本 正價五拾錢 郵稅 六 錢

題して算術手引草と言ふ、則ち中學程度に據り算術の算法と應用とを以て初學者に敎ふるの師友たるを期す、去れど凡そ算術上の算法は載せて漏らすことなく應用の道は說て悉さゞるなし、且其說明や所謂言文一致體を以てし、叮嚀懇切毫も世間在來の獨修書の如く隔靴搔痒の憾みなし、寔に近來出色の算術獨修書と謂ふも敢て誣言にあらざるなり是れ數學家の寶珍たり。

峯是三郎君著

地理、歷史、敎育 兵事、理科、實業 新題算術

大判洋裝並綴 正價拾八錢 郵稅 四 錢

算術書の多くは概ね假設的の數量、將た架空的の事項を以てす蓋し數理のみを練修するものとせば固より不可なしと雖も今日の學生たる者、其修むべき學課少しとせず著者茲に慨あり算術を學ぶの傍ら一方に地理歷史兵事敎育理科實業の智識を修得せんことを期す學者願くは本書に依て一擧兩得の實を得られんことを

主筆　日本中學校教師　攻玉社中學校教師　竹貫登代多君

中學課程　數學講義錄

各科共一ヶ年十二冊宛ニテ卒業

本講義錄は、三十七年度より專ら中學々生の參考書たらしめ、傍ら師範學生の好伴侶となり、自修者には唯一の指南車たるべく、平易なる言文一致體を以て代數學は二年、三年、四年、補習の四欄に、幾何學は三年、四年、五年、補習の四欄に、算術と三角は之を合して、一年、二年、五年、補習の四欄に分ちあれば、各學年何れの學生にも適用され得べく、

三科共毎月一回二十八日發行
洋裝大判紙數毎號八十頁
第一號……五月二十八日發行

算術及三角

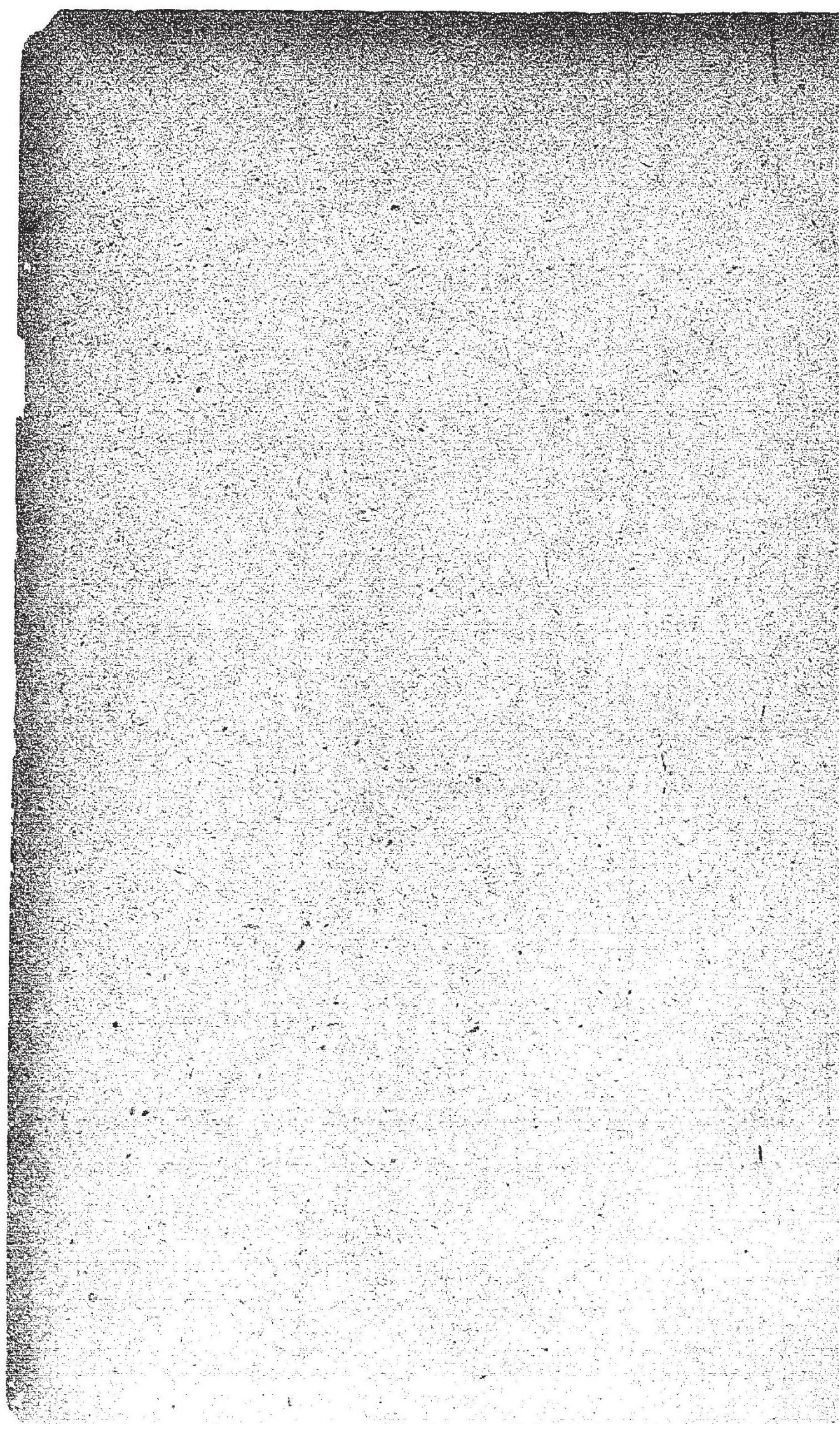
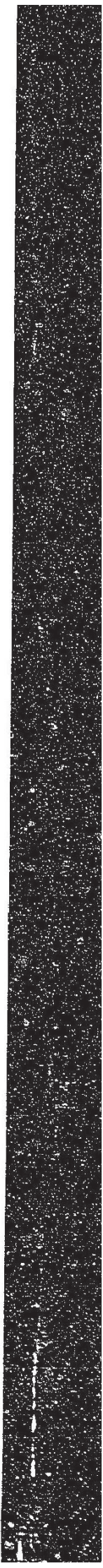
代數學

幾何學

定價

各種共一冊金拾錢宛
三ヶ月分　金貳拾九錢宛
六ヶ月分　金五拾七錢宛
一ヶ年分　金壹圓拾錢宛
▲外に郵税毎冊壹錢宛

遞信省第三種郵便物認可

各號に掲げたる問題は次號に於て之が詳解を與へ、以て讀者の便に供し、懸賞課題の答案優等者には賞品を與へ、質問應答欄は名の如く疑團の氷解所たるべく、猶卷末には研究資料の一欄を附し、知名數學家の腦中より出でたる嶄新なる論文を掲げて教材を統合し、又篤志家の意見をも紹介して、毫も遺憾なからんことを期す。

０５３７１５－０００－５

４５－３９５

新式算術講義

高木　貞治／著

Ｍ３７

ＣＡＣ－０８３９